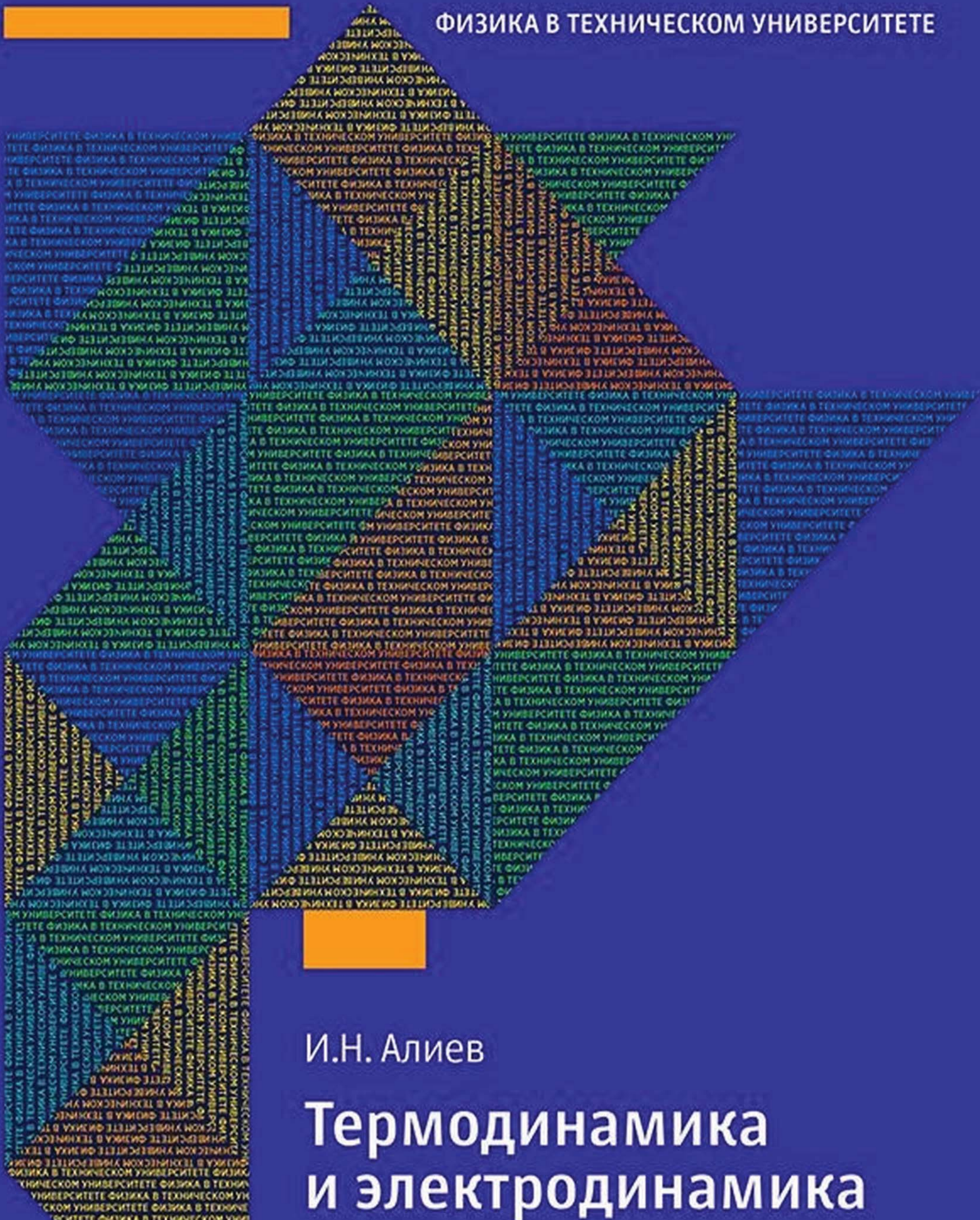
ФИЗИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ



И.Н. Алиев

Термодинамика и электродинамика сплошных сред

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 537.8
ББК 22.313
А50

Рецензенты:

кафедра общей физики МГОУ
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. *Д.Л. Богданов*);
д-р физ.-мат. наук, проф. *П.П. Полуэктов*

Рекомендовано Редакционно-издательским советом МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия

Алиев, И. Н.

А50 Термодинамика и электродинамика сплошных сред : учебное пособие / И. Н. Алиев. — Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. — 406, [2] с. : ил. — (Серия «Физика в техническом университете»).

ISBN 978-5-7038-4877-7

Рассмотрены различные аспекты механики поляризованных и проводящих сплошных тел и сред с учетом магнитных, электрических и тепловых эффектов. Изложение ведется в рамках общего подхода, базирующегося на термо- и электромеханическом вариационных принципах, которые позволяют находить условия равновесия, что невозможно с помощью принципов Гиббса и Планка. Полученные результаты применены к теории неравновесных процессов при выводе определяющих соотношений, необходимых для замыкания систем термоэлектромагнитодинамических уравнений. Пособие снабжено большим количеством задач, часть из них дополняет соответствующие главы, а часть является кратким изложением проведенных научных исследований.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, которые автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов и аспирантов технических университетов и вузов, преподавателей высшей школы, научных сотрудников, занимающихся техникой и физикой сплошных сред.

УДК 537.8
ББК 22.313

ISBN 978-5-7038-4877-7

Глава 1. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

Существует два основных физических подхода к описанию оптических явлений. Возникшую в XVII в. благодаря трудам П. Ферма и Х. Гюйгенса практически одновременно с классической механикой И. Ньютона приближенную, но все же хорошо описывающую эксперимент теорию называют *геометрической оптикой*. Другой, физически более адекватный эксперименту подход, создатели которого Т. Юнг и О. Форель работали в первой трети XIX в., называют *волновой оптикой*. Несмотря на приближенный характер геометрической оптики (в рамках этой теории полностью пренебрегают длиной волны света), она и в настоящее время служит основой инженерного подхода и используется при конструировании любого оптического прибора. Основными понятиями геометрической оптики являются «луч» и «волновой фронт», точнее, взаимно ортогональные семейства лучей и волновых фронтов.

1.1. Геометрическая оптика неоднородных сред

Введем понятие оптически неоднородной среды с заданным показателем преломления $n(x, y, z)$. *Оптически неоднородной средой* можно считать пространство внутри любого оптического прибора, который состоит из набора линз. В этом случае $n(x, y, z)$ является сложной кусочно-непрерывной (точнее, кусочно-постоянной) функцией. Оптически неоднородная среда характеризуется локальной фазовой скоростью света $u(x, y, z)$, связанной с показателем преломления простым соотношением

$$n(x,y,z)=\frac{c}{u(x,y,z)}.$$

Ясно, что всегда $u < c$ (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме), и поэтому $n > 1$.

Задача о прохождении лучей в оптически неоднородной среде решается с помощью **принципа Ферма** (1657). Формулируется этот принцип следующим образом: лучи или геометрическая кривая, по которой распространяется свет из точки A в точку B, отличается от всех других мыслимых геометрических траекторий тем, что время распространения света вдоль истинного пути минимально:

$$\tau_L = \int\limits_{A(L)}^{B} \frac{dl}{u(x, y, z)} \text{ минимально для истинной траектории } L_0, \qquad (1.1)$$

т. е. вариация функционала (1.1) $\delta\tau_L = 0$.

Этот принцип П. Ферма обосновал исходя из сформулированного им постулата: природа действует наиболее легкими и доступными путями.

Напомним основные понятия вариационного исчисления.

Закон, ставящий в соответствие каждой функции $f(x)$ из некоторого множества число $J[f]$, называется *функционалом*. Область определения функционала — множество функций — может иметь различную структуру. Далее будем использовать, как правило, функционалы вида $J[f] = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} f(\vec{r})\,d\vec{r}$. Вариация функционала вводится аналогично дифференциалу функции:

$$\delta J = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} J(f + \alpha\delta f).$$

Приведем для сравнения определение дифференциала:

$$dF = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} F(x + \alpha dx).$$

Именно из-за схожести определений некоторые формулы вариационного исчисления будем вводить по аналогии с соответствующими формулами дифференциального исчисления. В определении вариации функционала фигурирует *вариация* $\delta f(\vec{r})$. Под последней понимают малую по норме функцию из области определения функционала: $\|\delta f\| \ll \|f\|$. Под *нормой* следует понимать $\|f\| = \max|f(\vec{r})|$ на области определения. Дальнейшие дополнительные сведения из вариационного исчисления будем приводить по мере необходимости. Так, метод множителей Лагранжа в вариационной задаче на условный экстремум будет введен применительно к электрическому (и особенно к магнитному) принципам виртуальных работ (см. параграфы 4.3 и 5.5).

Пример 1.1. Рассмотрим оптически однородную среду, т. е. $n(x, y, z) = n =$ $=$ const, тогда, согласно выражению (1.1), имеем

$$\tau_L = \frac{1}{u} \int\limits_{A(L)}^{B} dl = \frac{1}{u} l_L,$$

где l_L — длина кривой, проходящей через точки A и B.

Очевидно, что кривая с минимальной длиной — это отрезок, соединяющий точки A и B. Следовательно, в однородной среде все лучи являются прямыми линиями. Это и есть **закон прямолинейного распространения света**.

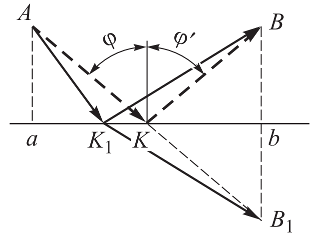


Рис. 1.1. Ход луча при отражении

Пример 1.2. Рассмотрим истинный путь луча, отраженного от границы раздела двух однородных сред (рис. 1.1). Тогда выражение (1.1) можно записать следующим образом:

$$\tau = \int_{A}^{K_1} \frac{dl}{u} + \int_{K_1}^{B} \frac{dl}{u} = \frac{1}{u}(AK_1 + K_1B).$$

Поскольку $AK_1 + K_1B = AK_1 + K_1B_1$, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно прямой ab, и $AK_1 + K_1B_1 > AK + KB_1$ (точка K лежит на прямой AB_1), ясно, что кратчайшее расстояние от A до B — ломаная AKB. Тогда из равенства треугольников KBb и KB_1b естественным образом вытекает **закон отражения света** — равенство углов падения и отражения. Очевидно, что тот же результат можно было бы получить, исследовав на экстремум функцию зависимости длины пройденного пути $l = AK_1 + K_1B$ от координаты точки K_1.

Пример 1.3. Рассмотрим преломление луча на границе раздела двух сред (рис. 1.2).

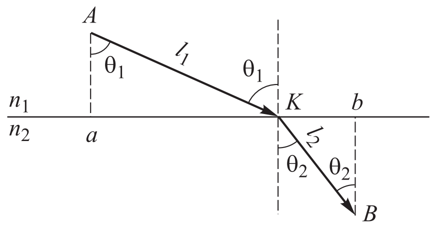


Рис. 1.2. Ход луча при преломлении

Зададим положение точек A и B. Тогда выполняется условие $aK + bK = \text{const}$.

В этом случае $\tau = \dfrac{l_1}{u_1} + \dfrac{l_2}{u_2}$ и вариация $\delta\tau = \dfrac{\delta l_1}{u_1} + \dfrac{\delta l_2}{u_2}$ (u_i — скорость света в i-й среде).

Из очевидных равенств

$$l_1^2 = (aA)^2 + (aK)^2; \quad l_2^2 = (bB)^2 + (bK)^2$$

следует, что

$$l_1\delta l_1 = (aK)\delta(aK); \quad l_2\delta l_2 = (bK)\delta(bK);$$

$$\delta(aK) + \delta(bK) = 0;$$

$$\delta\tau = \frac{(aK)\delta(aK)}{u_1 l_1} + \frac{(bK)\delta(bK)}{u_2 l_2} = \left(\frac{aK}{l_1 u_1} - \frac{bK}{l_2 u_2}\right)\delta(aK) =$$

$$= \left(\frac{\sin\theta_1}{u_1} - \frac{\sin\theta_2}{u_2}\right)\delta(aK) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Получили известный **закон преломления** (В. Снеллиус). Здесь n_i — абсолютный показатель преломления каждой из сред, а n_{12} — так называемый относительный показатель преломления второй среды по отношению к первой.

Рассмотрим теперь более строго и последовательно **задачу о прохождении лучей в оптически неоднородной среде**. Для этого принцип Ферма сформулируем следующим образом: из всех геометрически мыслимых кривых, соединяющих две фиксированные точки A и B, реализуется та кривая L, для которой экстремально значение интеграла

$$S = \int\limits_{A(L)}^{B} n(x, y, z)dl, \tag{1.2}$$

где dl — элемент длины кривой.

Получим, исходя из принципа Ферма, дифференциальное уравнение для оптических лучей. Учтем, что для элемента длины dl дуги вдоль траектории и радиуса-вектора $\vec{r}$ произвольной точки M на этой же траектории имеет место очевидное соотношение $d\vec{r}/dl = \vec{\tau}$ ($\vec{\tau}$ — касательный орт). Интеграл Ферма можно преобразововать. Для этого зададим уравнение траектории параметрически:

$$dl = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(\dot{x}dt)^2 + (\dot{y}dt)^2 + (\dot{z}dt)^2} =$$

$$= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{\dot{r}^2}\,dt = \dot{r}dt.$$

Здесь для удобства использована следующая форма записи:

$$\dot{r}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

где $r(t)$ — модуль радиуса-вектора точек луча.

Варьируя полученный интеграл: $S = \int\limits_0^T n\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{r}(t)dt$, приходим к выражению

$$\delta S = \int\limits_0^T \left[\left(\frac{\partial n}{\partial x}\delta x + \frac{\partial n}{\partial y}\delta y + \frac{\partial n}{\partial z}\delta z\right)\dot{r} + n\frac{\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}}{\dot{r}}\right]dt.$$

Интегрируя его по частям и учитывая, что

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}\delta x;\quad \delta\dot{y} = \frac{d}{dt}\delta y;\quad \delta\dot{z} = \frac{d}{dt}\delta z,$$

получаем

$$\delta S = \int\limits_0^T \left\{\left[\frac{\partial n}{\partial x}\dot{r} - \frac{d}{dt}\frac{n\dot{x}}{\dot{r}}\right]\delta x + \left[\frac{\partial n}{\partial y}\dot{r} - \frac{d}{dt}\frac{n\dot{y}}{\dot{r}}\right]\delta y + \left[\frac{\partial n}{\partial z}\dot{r} - \frac{d}{dt}\frac{n\dot{z}}{\dot{r}}\right]\delta z\right\}dt +$$

$$+ \frac{n}{\dot{r}}\left(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z\right)\Big|_0^T. \tag{1.3}$$

Согласно принципу Ферма, $\delta S = 0$. Учитывая, что конечные точки траектории луча не варьируются, т. е. $\delta x(0) = \delta x(T) = \delta y(0) = \delta y(T) = \delta z(0) = \delta z(T) = 0$, и что выражение (1.3) для вариации имеет место при любых значениях δx, δy, δz, получаем

$$\frac{\partial n}{\partial x}\dot{r} = \frac{d}{dt}\frac{n\dot{x}}{\dot{r}}; \quad \frac{\partial n}{\partial y}\dot{r} = \frac{d}{dt}\frac{n\dot{y}}{\dot{r}}; \quad \frac{\partial n}{\partial z}\dot{r} = \frac{d}{dt}\frac{n\dot{z}}{\dot{r}}.$$

Дифференциальное уравнение можно упростить, если в качестве независимой переменной перейти от параметра t к длине дуги l (напомним, что $\dot{r}dt = dl$):

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{dl}\left(n\frac{dx}{dl}\right); \quad \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{d}{dl}\left(n\frac{dy}{dl}\right); \quad \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{d}{dl}\left(n\frac{dz}{dl}\right),$$

или в векторном виде

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n. \tag{1.4}$$

Если теперь принять, что $\{x(t), y(t), z(t);\ 0 \le t \le T\}$ — истинная траектория, причем ее конечные точки варьируются, то

$$\delta S = n\frac{\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z}{\dot{r}}\bigg|_0^T.$$

Будем считать S вычисленной для истинной траектории луча функцией координат начальной или конечной точки, т. е. $S = S(x_A, y_A, z_A;\ x_B, y_B, z_B)$, тогда

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = n\frac{\dot{x}}{\dot{r}}\bigg|_B, \quad \frac{\partial S}{\partial y_B} = n\frac{\dot{y}}{\dot{r}}\bigg|_B, \quad \frac{\partial S}{\partial z_B} = n\frac{\dot{z}}{\dot{r}}\bigg|_B;$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_A} = -n\frac{\dot{x}}{\dot{r}}\bigg|_A, \quad \frac{\partial S}{\partial y_A} = -n\frac{\dot{y}}{\dot{r}}\bigg|_A, \quad \frac{\partial S}{\partial z_A} = -n\frac{\dot{z}}{\dot{r}}\bigg|_A.$$

Полученные выражения можно переписать в виде

$$\operatorname{grad}_A S = -n_A\vec{\tau}_A; \quad \operatorname{grad}_B S = n_B\vec{\tau}_B,$$

где n_A и n_B — значения показателя преломления среды в начальной (A) и конечной (B) точках соответственно; $\vec{\tau}_A$, $\vec{\tau}_B$ — единичные векторы, касательные к траектории луча в точках A и B соответственно $\left(|\vec{\tau}| = 1\right)$.

Эти выражения показывают, что луч ортогонален к поверхности $S = \text{const}$. Таким образом, уравнение, связывающее траекторию луча и волновую поверхность, имеет вид

$$\operatorname{grad} S = n\frac{d\vec{r}}{dl} = n\vec{\tau} \quad \text{или} \quad (\operatorname{grad} S)^2 = n^2,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2. \tag{1.5}$$

Уравнение для луча получим, продифференцировав по l α-ю компоненту выражения $n\dfrac{d\vec{r}}{dl}$:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{dx_\alpha}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial x_\beta}{\partial l} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{\partial S}{\partial x_\beta}\frac{1}{n} =$$

$$=\frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\beta}\frac{\partial S}{\partial x_\beta}\right)=\frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}n^2=\frac{1}{2n}\cdot 2n\frac{\partial n}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial n}{\partial x_\alpha}.$$

Окончательно в векторном виде снова получим уравнение (1.4).

1.2. Основное уравнение геометрической оптики

Основная идея У. Гамильтона базируется на введении понятия *оптической длины пути*, которая формально определяется как интеграл между начальной и конечной точками движения луча, взятый вдоль его траектории:

$$S=\int_A^B n(x,y,z)dl=\int_A^B n\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Рассмотрим теперь луч, выходящий из фиксированной точки O и приходящий в произвольную точку M.

Интеграл Ферма, взятый по действительному оптическому лучу, можно рассматривать как функцию координат конечной точки:

$$S_M\equiv S(x,y,z)=\int_0^{M(x,y,z)} n(x',y',z')dl. \tag{1.6}$$

Гамильтон назвал эту функцию характеристической. Дифференцируя криволинейный интеграл первого рода (1.6) по переменному верхнему пределу, т. е. по координатам точки $M(x,y,z)$, получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=n^2\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz}{dl}\right)^2\right].$$

Далее, учитывая, что dl — дифференциал дуги и, следовательно, $(dl)^2=$ $=(dx)^2+\ (dy)^2+(dz)^2$, вновь получаем уравнение (1.5), которое и является основным уравнением геометрической оптики.

Работы У. Гамильтона были написаны в очень пространной форме и оставались долгое время (до появления работ К. Якоби) почти неизвестными.

Следует отметить, что известный конструктор микроскопов Э. Аббе в конце XIX в. пользовался собственными теоретическими представлениями, эквивалентными идеям Гамильтона. В 1895 г. астроном Г. Брунс независимо от Гамильтона развил аналогичную теорию и назвал функцию S прижившимся в науке термином «*эйконал*» (от англ. *eikon* — изображение), в связи с чем соотношение (1.5) называется **уравнением Гамильтона — Брунса**.

1.3. Оптико-механическая аналогия

Рассмотрим частицу массой m с импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$ (где $\vec{v}$ — скорость частицы), которая движется в потенциальном поле силой $\vec{F}$. В классической механике используют два различных подхода к постановке задач.

1. Определить закон движения частицы в последующие моменты времени, если заданы начальные условия: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$; $\dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}_0$.

2. Определить закон движения частицы, если заданы ее положения в моменты времени 0 и T: $\vec{r}(0) = \vec{r}_A$; $\vec{r}(T) = \vec{r}_B$.

Уравнения движения при этом имеют один и тот же вид:

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\mathrm{grad}\, U(\vec{r}),$$

где $U(\vec{r})$ — потенциальная энергия частицы.

Рассмотрим нерелятивистскую материальную частицу массой m, движущуюся в потенциальном поле с потенциалом $U(\vec{r})$. Уравнение ее движения имеет вид $\dot{\vec{p}} = -\mathrm{grad}\, U$. Из этого уравнения и закона сохранения энергии $\dfrac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = E$ (где E — полная энергия частицы), вновь введя единичный вектор $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, касательный к траектории движения, несложно вывести соотношение $\dfrac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau} = \dfrac{\vec{p}}{\sqrt{2m[E - U(\vec{r})]}}$. Отсюда получаем (зависимость от $\vec{r}$ для краткости далее опускаем)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dl}\sqrt{2m(E-U)}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\mathrm{grad}\, U;$$

$$\frac{d}{dl}\left(\sqrt{2m(E-U)}\,\frac{d\vec{r}}{dl}\right)\frac{dl}{dt} = -\mathrm{grad}\, U;$$

$$\frac{d}{dl}\left(\sqrt{2m(E-U)}\,\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = -\frac{1}{v}\mathrm{grad}\, U = -\frac{\mathrm{grad}\, U}{\sqrt{2(E-U)/m}} =$$

$$= -\frac{2m\,\mathrm{grad}\, U}{2\sqrt{2m(E-U)}} = \mathrm{grad}\left(\sqrt{2m(E-U)}\right).$$

Окончательно имеем

$$\frac{d}{dl}\left(\sqrt{2m(E-U)}\,\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \mathrm{grad}\left(\sqrt{2m(E-U)}\right). \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) совпадает с уравнением (1.4) для оптического луча, если считать, что показатель n преломления среды пропорционален выражению $\sqrt{2m(E-U)}$ (отметим, однако, что n — безразмерная величина, а $\sqrt{2m(E-U)}$ имеет размерность импульса).

Обобщим полученный результат для релятивистского случая.

Если записать закон сохранения энергии для кванта электромагнитного поля в виде $c|\vec{p}|+U(\vec{r})=E,$ причем $\vec{p}$ трактовать как импульс, а $U(\vec{r})$ — как потенциальную энергию кванта (c — скорость света в вакууме), то получим уравнение, аналогичное уравнению (1.7). Действительно, из аналога второго закона Ньютона

$$\dot{\vec{p}}=-\operatorname{grad}U \tag{1.8}$$

с учетом очевидных соотношений

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=c\vec{\tau};\quad \frac{dl}{dt}=c \tag{1.9}$$

получаем уравнение

$$c\frac{d\vec{p}}{dl}=-\operatorname{grad}U,$$

где dl — элемент длины дуги, а импульс $\vec{p}$ направлен по касательной к траектории: $\vec{p}=p\vec{\tau}.$

Далее имеем

$$\frac{d\vec{r}}{dl}=\vec{\tau}=\frac{c\vec{p}}{E-U};$$

$$\vec{p}=\frac{1}{c}\left(E-U\right)\frac{d\vec{r}}{dl};$$

$$\frac{d}{dl}\left[\left(E-U\right)\frac{d\vec{r}}{dl}\right]=-\operatorname{grad}U;$$

$$\frac{d}{dl}\left[\left(E-U\right)\frac{d\vec{r}}{dl}\right]=\operatorname{grad}\left(E-U\right). \tag{1.10}$$

Полученное таким образом выражение является уравнением для световых лучей, если считать, что показатель n преломления среды пропорционален $E-U$. Отметим, что n, как и прежде, безразмерная величина, а $E-U$ в отличие от уравнения (1.7) имеет размерность энергии.

Покажем теперь, как из механических уравнений (1.8) и (1.9) для кванта можно получить закон сохранения энергии. Рассмотрим очевидные преобразования:

$$\frac{d}{dt}\left(c|\vec{p}|\right)=c\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\vec{p}\vec{p}}\right)=c\frac{\dot{\vec{p}}\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}\vec{p}}}=c\frac{d\vec{p}}{dt}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=c\frac{d\vec{p}}{dl}\frac{dl}{dt}\vec{\tau}=-\nabla U\vec{\tau}\frac{dl}{dt}=-\frac{dU}{dl}\frac{dl}{dt}=-\frac{dU}{dt},$$

где $\nabla\equiv\operatorname{grad}$ — оператор Гамильтона (набла).

Из последних соотношений вытекает, что $\frac{d}{dt}\left(c|\vec{p}|+U(\vec{r})\right)=0$ и, следовательно, $c|\vec{p}|+U(\vec{r})=\text{const}=E.$

Остается открытым вопрос о том, как трактовать потенциальную энергию для кванта и, соответственно, уравнение (1.8). Видимо, в рамках специальной теории относительности гипотеза о законе сохранения энергии не может быть разрешена принципиально, однако отмеченная аналогия с механическим уравнением (1.7) позволяет ввести вышеуказанное допущение.

1.4. Волновая теория Френеля и приближение коротких длин волн

Геометрическая оптика представляет собой приближенную теорию света. В ней не учитываются интерференционные и дифракционные явления, которые возникают в реальных оптических волнах. Физически более правильную волновую теорию света в начале XIX в. развил О. Френель. Теория Френеля тоже неполна: в ней считается, что оптическая волна характеризуется алгебраическим числом — скаляром, а не вектором. Истинную физическую теорию оптики дала электромагнитная теория Фарадея —Максвелла. Однако многие оптические явления хорошо описываются скалярной оптикой Френеля.

Обозначим через $\psi(x, y, z, t)$ скалярную функцию, характеризующую волну в волновой теории Френеля. В оптически однородной среде с показателем преломления n волновое уравнение для волновой функции имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \tag{1.11}$$

где $u=c/n$ — локальная скорость света в среде.

Рассмотрим теперь в оптически однородной среде строго периодическую волну, характеризуемую некоторой угловой частотой ω. Такие волны зависят от времени, что отражает множитель $e^{-i\omega t}$ (i — мнимая единица, знак «–» условились брать в большей части физической литературы). Тогда, положив $\psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)e^{-i\omega t}$ и подставив его в уравнение (1.11), получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{u^2}\psi=0. \tag{1.12}$$

Последнее уравнение можно назвать «невременным« (стационарным) волновым уравнением.

Величину $k=\omega/u$ называют *локальным волновым числом*, связанным с локальной длиной волны соотношением $k=2\pi/\lambda$. Таким образом, с учетом того, что

$$\lambda=\frac{2\pi}{\omega}u=\frac{1}{v}u,$$

где $v=1/T$ — частота волны (T — ее период), уравнение (1.12) примет вид

$$\Delta\psi+k^2\psi=0.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа.

Рассмотрим так называемое приближение коротких волн, т. е. выясним, в какую приближенную теорию перейдет в этом случае волновая теория Френеля. При $k \to \infty$ ($\lambda \to 0$) решение волнового уравнения будем искать в следующем виде:

$$\psi(x, y, z) = e^{ik_0 S(x,y,z)},$$

где $S(x, y, z)$ — некоторая неизвестная функция; $k_0 = \omega/c$ — значение волнового числа в вакууме для рассматриваемой угловой частоты ($k_0 \to \infty$).

Дифференцируя по x, получаем очевидные соотношения:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ik_0 \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S};$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} e^{ik_0 S} - k_0^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 e^{ik_0 S}.$$

Аналогичные выражения получаем для y и z. Таким образом,

$$ik_0 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) - k_0^2 \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + k^2 = 0.$$

При k, $k_0 \to \infty$ приходим к основному уравнению коротких волн (1.5) (первым слагаемым пренебрегаем):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = n^2,$$

так как $k = \dfrac{\omega}{u} = \dfrac{\omega n}{c} = k_0 n.$

Исходя из уравнения строгой волновой теории Френеля получили в приближении коротких волн **основное уравнение геометрической оптики**, или **уравнение Гамильтона — Брунса**. Таким образом, геометрическая оптика получается из волновой в пределе коротких длин волн.

Приведем более строгий вывод уравнения коротких волн на примере продольных звуковых волн в неоднородном стержне. Предварительно рассмотрим одномерный случай. Уравнение движения элемента стержня длиной dx имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} S dx = F(x + dx) - F(x).$$

Здесь ρ и S — плотность и площадь поперечного сечения стержня соответственно; $\xi(x, t)$ — смещение частиц среды. Сила, действующая в поперечном сечении, и относительная деформация связаны законом Гука:

$$\frac{F(x)}{S} = E(x) \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

где $E(x)$ — модуль Юнга. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dx = E(x+dx)\frac{\partial\xi(x+dx)}{\partial x} - E(x)\frac{\partial\xi(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx,$$

т. е.

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

Далее по аналогии с вышеизложенной процедурой:

$$\xi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t};\quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{d\psi}{dx}\right) + \omega^2\psi = 0.$$

Введем характерные значения модуля Юнга E_0, фазовой скорости продольных упругих волн $v_0 = \sqrt{E_0/\rho}$, волнового числа $k_0 = \omega/v_0$ и некоторый аналог показателя преломления $\dfrac{1}{\zeta(x)} = \dfrac{E_0}{E(x)} = n^2$. Тогда

$$\frac{E_0}{\rho}\frac{d}{dx}\left(\frac{E(x)}{E_0}\frac{d\psi}{dx}\right) + \omega^2\psi = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left(\zeta(x)\frac{d\psi}{dx}\right) + k_x^2\frac{v^2}{v_0^2}\psi = 0,$$

где k_x — волновое число волны, распространяющейся вдоль оси Ox со скоростью v.

Не составляет труда обобщить полученное уравнение на трехмерный случай. Для этого в последнем уравнении запишем производную:

$$\frac{d\zeta(x)}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \zeta(x)\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_x^2\frac{v^2}{v_0^2}\psi = 0.$$

Затем с учетом выражения $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ сложим три одномерных уравнения:

$$\nabla\left(\zeta(\vec{r})\nabla\psi\right) = \left(\nabla\zeta, \nabla\psi\right) + \zeta\nabla\nabla\psi.$$

Окончательно получим

$$\nabla\left(\zeta(\vec{r})\nabla\psi\right) + k^2\frac{v^2}{v_0^2}\psi = 0.$$

Представим функцию ψ в следующем виде:

$$\psi = e^{ik_0 S(\vec{r})}\nabla\psi = \psi i k_0\nabla S.$$

Тогда

$$\nabla\nabla\psi = -k_0^2\psi(\nabla S)^2 + ik_0\psi\Delta S;$$

$$\left(\nabla\zeta, \nabla\psi\right) = ik_0\psi\left(\nabla\zeta, \nabla S\right).$$

С учетом всех слагаемых получим

$$(\nabla S)^2 = \frac{i\Delta S}{k_0} + \frac{i}{k_0}\frac{(\nabla\zeta, \nabla S)}{\zeta} + \frac{k^2}{k_0^2}\frac{\upsilon^2}{\upsilon_0^2}\frac{1}{\zeta}.$$

При k, $k_0 \to \infty$ вновь приходим к основному уравнению коротких волн (в правой части оставляем только последнее слагаемое):

$$(\nabla S)^2 = n^2.$$

Отметим, что это приближение справедливо также в случае геометрической акустики и может быть применено для волн на поверхности жидкости (см. задачу 9.6).

1.5. Принципы наименьшего действия Мопертюи и Гамильтона

Существует две формулировки принципа наименьшего действия. Принцип П. Мопертюи в очень неявной форме впервые был изложен в 1747 г. Определенную математическую формулировку этому принципу дали Л. Эйлер и Ж. Лагранж, затем Г. Гельмгольц распространил принцип наименьшего действия на другие области физики, в частности на электродинамику.

Принцип наименьшего действия Мопертюи формулируется следующим образом: из всех мыслимых геометрических кривых, идущих из одной фиксированной точки M в другую фиксированную точку N (виртуальных траекторий), траектория истинного движения частицы с фиксированной энергией отличается тем, что для нее действие $W = \int_M^N \vec{p}(\vec{r})\,d\vec{l}$ минимально. Математическая формулировка принципа имеет следующий вид:

$$\delta W = \delta\int_M^N \vec{p}(\vec{r})\,d\vec{l} = 0 \text{ при } \delta E = 0.$$

Учитывая, что векторы $d\vec{r}$ и $d\vec{l}$ коллинеарны (рис. 1.3), действие можно записать в другом виде:

$$W = \int_{\vec{r}_M}^{\vec{r}_N} \vec{p}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{x_M, y_M, z_M}^{x_N, y_N, z_N} (p_x dx + p_y dy + p_z dz).$$

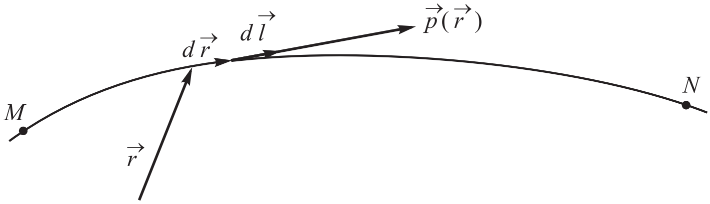


Рис. 1.3. Схема, иллюстрирующая принцип наименьшего действия

Убедимся в справедливости принципа Мопертюи на примере свободной частицы. Действие для нее при движении от точки M к точке N вдоль некоторой кривой l

$$W = \int_M^N p dl = \sqrt{2mE}\int_M^N dl = \sqrt{2mE}\, l_{MN},$$

где l_{MN} — длина кривой MN.

Очевидно, что из всех кривых наименьшим действием обладает прямая, соединяющая точки M и N, так как она имеет наименьшую длину l_{MN}. Таким образом, из принципа Мопертюи следует, что траекторией движения свободной частицы с заданной энергией из точки M в точку N является прямая линия. Отметим, что истинное движение по траекториям соответствует, вообще говоря, не минимуму, а экстремуму действия. На это ясно указал К. Якоби в своих лекциях по динамике, прочитанных в Кенигсберге в 1842 г.

Принцип наименьшего действия Гамильтона формулируется несколько иначе: при $\delta T = 0$ должно выполняться условие

$$\delta S = \delta\int_0^T L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, dt = 0,$$

где $L = K - U(\vec{r}, t)$ — функция Лагранжа (K — кинетическая энергия частицы). Эту функцию Г. Гельмгольц называл химическим потенциалом, но такой термин не прижился в науке.

Отметим, что функция Лагранжа определяется с точностью до аддитивной постоянной. Действительно, если $L' = L + C$ (где $C = \mathrm{const}$), то

$$\delta\int_0^T L' dt = \delta\int_0^T L dt + C\delta T = \delta\int_0^T L dt,$$

так как в принципе наименьшего действия Гамильтона время не варьируется ($\delta T = 0$).

Действия по Гамильтону и Мопертюи (последнее в некоторых случаях называют *укороченным действием*) связаны соотношением

$$W(\vec{r}, E) = S(\vec{r}, t) + Et,$$

где E — энергия системы в принципе Мопертюи; t — время движения в принципе Гамильтона.

Принцип наименьшего действия Мопертюи в отличие от принципа Гамильтона не определяет полностью движение механической системы и используется лишь при изучении траекторий.

1.6. Волна действия

Рассмотрим пучок траекторий, по которым частицы массой m с одинаковыми энергиями E выходят из некоторой точки. Очевидно, что вдоль каждой траектории действие возрастает. Проведем в определенный момент времени поверхность через точки на разных траекториях, обладающие одним и тем же действием S. Уравнение этой волновой поверхности имеет вид $S(\vec{r}, t) = \text{const}$.

Можно сказать, что волна действия — это распространяющаяся в пространстве с течением времени волновая поверхность, описываемая уравнением $W(\vec{r}, E) - Et = \text{const}$. Перпендикулярно произвольной волновой поверхности *1* построим пучок траекторий *2* движущихся частиц (рис. 1.4). Отметим на каждой из этих траекторий точки с заданным значением $S' > S$ и образуем новую волновую поверхность, проходящую через эти точки. Таким образом, легко проследить динамику распространения волны действия.

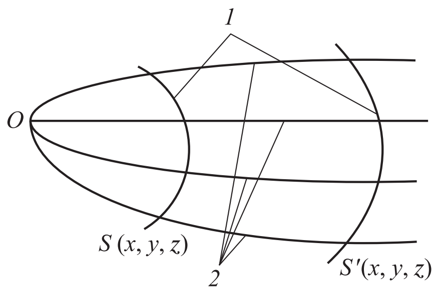


Рис. 1.4. Волна действия и траектории частиц

Скорость распространения волны действия как функция той точки пространства, которую волна действия проходит в данный момент, зависит от совокупности физических параметров среды. Действительно, дифференцируя уравнение волновой поверхности по времени, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial S}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial S}{\partial z}\dot{z} = E.$$

Здесь учтено, что $\nabla S(\vec{r}, t) = \nabla W(\vec{r}, E)$.

Поскольку $\partial W/\partial \vec{r} = \vec{p}$, то $(\vec{u}, \vec{p}) = E$, где $|\vec{p}| = \sqrt{2m(E-U)}$ и $\vec{u} = \vec{u}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

Волна действия распространяется перпендикулярно волновой поверхности (т. е. по нормали), поэтому потребуем выполнения условия параллельности: $\vec{u} \parallel \vec{p}$. Тогда $E = (\vec{u}, \vec{p}) \equiv up$, откуда получаем

$$u(\vec{r}) = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}.$$

Последнее выражение и определяет *локальную скорость волны действия в данной точке*.

Отметим еще раз основное свойство волновых поверхностей. Как уже было указано, профиль волны действия находим из уравнения $W(x, y, z, E) =$ $= \text{const}$. Нормаль к этой поверхности имеет компоненты $\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right)$, равные соответственно (p_x, p_y, p_z), т. е. образующие вектор $\vec{p}$. Однако вектор импульса направлен по касательной к траектории движения, поэтому любая волновая поверхность перпендикулярна траекториям движения соответствующего их пучка.

1.7. Уравнение Гамильтона — Якоби

Любая волна действия удовлетворяет так называемому **уравнению Гамильтона — Якоби**

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+U(x,y,z)=-\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{1.13}$$

которое получается из выражения для полной энергии частицы $E=\dfrac{p^2}{2m}+U(\vec{r})$ заменой $\vec{p}$ на $\dfrac{\partial S}{\partial \vec{r}}=\dfrac{\partial W}{\partial \vec{r}}$ и E на $-\dfrac{\partial S}{\partial t}$. Отметим, что здесь под производной по вектору $\vec{a}$ понимаем вектор $\vec{b}$ с компонентами $\dfrac{\partial S}{\partial a_i}=b_i$ $(i=1,2,3)$.

Получить это уравнение можно также исходя из следующих соображений. На истинной траектории выберем некоторую начальную точку M_0. Зададим действие в произвольной точке M:

$$W_M=W_{M_0}+\int_{M_0}^{M}\vec{p}\,d\vec{l}.$$

Пусть длина малого отрезка, перпендикулярного фронтам действия, которые проходят через точки M_0 и M, равна Δl. Тогда $\left|\operatorname{grad} W\right|\cong\dfrac{\Delta W}{\Delta l}$ при $\Delta l\to 0$. Далее, $\Delta W=p\Delta l$, так что $\dfrac{\Delta W}{\Delta l}=p$. Поэтому

$$(\operatorname{grad} W)^2=p^2=2m[E-U(\vec{r})].$$

Как было показано ранее, из $S(x,y,z,t)=W(x,y,z,E)-Et$ следует, что $\operatorname{grad} W=\operatorname{grad} S$ и $-\dfrac{\partial S}{\partial t}=E$, поэтому

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=2m\left[-\frac{\partial S}{\partial t}-U(\vec{r})\right].$$

Замечание. Уравнение Гамильтона — Якоби нелинейно, т. е. если S_1 и S_2 — его решения, то $S_1\pm S_2$ или αS_1 не обязательно тоже являются решениями.

В качестве примера рассмотрим поведение свободной частицы. В этом случае $U(\vec{r})=0$ и частица движется прямолинейно и равномерно со скоро-

Оглавление