УЧЕБНЫЕ ИЗДАНИЯ ДЛЯ ВУЗОВ

А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов

# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**УДК 330.115**
**ББК 65.01**
**Г44**

**Авторы:**

*А. В. Гетманчук* — кандидат технических наук, доцент;

*М. М. Ермилов* — старший преподаватель Российского университета кооперации.

**Рецензенты:**

*К. В. Балдин* — доктор экономических наук, профессор, МИРЭА — Российский технологический университет;

*О. А. Новиков* — доктор экономических наук, профессор, РГГУ.

**Гетманчук, Андрей Владимирович.**

**Г44** Экономико-математические методы и модели : учебное пособие для вузов / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. — 3-е изд. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2024. — 174 с.

ISBN 978-5-394-05857-8.

В учебном пособии рассматриваются основные экономико-математические методы и модели, а также специальные модели, предложенные авторами. В качестве примера приводится применение экономико-математических моделей при анализе процессов в агропромышленном комплексе. Для удобства изучающих в пособии приведен используемый математический аппарат.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению подготовки «Экономика», а также управленческого персонала и практических работников.

ISBN 978-5-394-05857-8

# СОДЕРЖАНИЕ

# 1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Современные экономические исследования все чаще обращаются к построению и использованию экономико-математических моделей. Для построения таких моделей служат классические или специально разработанные экономико-математические методы. Необходимость построения экономико-математических моделей подчеркивает известное утверждение Конта: знать, чтобы предвидеть, предвидеть, чтобы управлять. Экономико-математические модели реализуют первую часть этой формулы и являются базисом для второй ее части.

Как известно, модель в широком смысле можно определить как некую мыслительную конструкцию, отражающую интересующие исследователя особенности функционирования изучаемого объекта. В зависимости от целей исследования для описания одного и того же объекта может использоваться множество моделей. Это является следствием относительности и неполноты знаний, точки зрения исследователя на изучаемый объект, а также специфики выдвигаемых целей моделирования, в соответствии с которыми одни элементы, свойства и отношения считаются главными и включаются в модель, в то время как влияние других, считающихся несущественными, не учитывается. Справедливо в известной степени и обратное утверждение: одна и та же модель может описывать однотипные свойства и механизмы функционирования различных по своей природе объектов. Корректность модели определяется степенью адекватности лежащих в ее основе аксиом, гипотез, исходных данных, относящихся к реальной структуре моделируемого объекта, особенностям его функционирования и взаимосвязям с окружающей средой. В целом всякая модель является упрощенным представлением действительности, и искусство моделирования состоит в знании того, что, где и как можно упростить.

В наше время роль экономико-математического моделирования многократно возрастает в силу активного применения компьютерных технологий. Задачи, которые раньше казались нерешаемыми, теперь успешно рассчитываются с помощью компьютерного моделирования. В математических моделях аналитического типа и моделях, использующих объектно-ориентированное программирование, упрощение достигается за счет замены интересующих исследователя отношений между реальными элементами подходящими отношениями между математическими объектами и последующим использованием для описания зависимостей известных методов математического и компьютерного анализа. В числе последних — методы линейной алгебры, дифференциальных уравнений, математической статистики, теории оптимизации, теории игр, исследования операций, математического моделирования и других математических дисциплин.

Перспективным направлением представляется математическое моделирование развития экономических систем, включающее стадии потери устойчивости и фазовых переходов к новой структуре. При описании динамики подобной системы воспроизводится ее временная организация с учетом различия процессов по времени протекания. Основным требованием к модели является воспроизведение эволюции экономической системы, в ходе которой могут меняться параметры, считающиеся константами на малых промежутках времени. Любые экономические данные представляют собой характеристики какого-либо экономического объекта. Они формируются под воздействием множества факторов, не все из которых доступны наблюдению и контролю. Неконтролируемые (неучтенные) факторы обусловливают случайность данных, которые они представляют.

Математическая модель может быть представлена в виде формул, графов, блок-схем, алгоритмов, компьютерной реализации. Каждый из перечисленных математических методов использует широкий арсенал математических моделей. Выбор моделей зависит от ответов на следующие вопросы:

— насколько изучены подлежащие моделированию процессы;

— известны ли для них закономерности и правила функционирования;

— существует ли достаточная информационная база и инструментарий для ее наполнения;

— какого рода результаты требуется получить — прогноз количественных показателей или качественная картина изучаемого процесса или явления.

Необходимо отметить, что существуют как методологические проблемы экономико-математического моделирования, так и проблемы прикладного характера. Прежде всего это связано с несовершенством существующих моделей, что неизбежно ведет к дискредитации идеи полезности экономико-математического моделирования, медленному внедрению экономико-математических моделей в теорию и практику. Сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования; именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования. Однако именно эта сложность процессов и явлений затрудняет не только построение математических моделей, но и проверку их адекватности, истинности получаемых результатов. Еще одна проблема — это недостаток системного, комплексного подхода к моделированию задач, который бы объединял коллективы математиков, физиков, программистов и т. д. Этому способствует и борьба научных школ, научных направлений, порой диаметрально противоположно трактующих одни и те же явления. Поэтому возможность математического моделирования экономических процессов не означает, разумеется, ее успешной осуществимости при данном уровне математических знаний, имеющейся конкретной информации и вычислительной техники. И хотя нельзя указать абсолютные границы математической формализуемости проблем, всегда будут существовать еще неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование недостаточно эффективно.

В силу ряда причин парадигмой последних десятилетий является не производство и даже не торговля, а перераспределение финансовых активов и финансовые спекуляции. Поэтому в современных условиях в экономико-математические модели наряду с используемыми ранее можно ввести новые сектора: производство финансовых средств и зависимый от него торговый сектор, а также сектор добычи полезных ископаемых, аграрный сектор, сектор обслуживания населения и сектор теневой экономики. Финансовый сектор — это прежде всего мировая банковская система, торговый сектор в большой степени представляют всемирные торговые сети, остальные сектора особых комментариев не требуют.

Современное развитие экономико-математических методов вплотную подошло к возможности построения адекватных моделей, основанных на новых аналитических и проектных методах. Построение таких моделей в масштабах мировой экономики — дело ближайшего будущего.

# 2. ПРИМЕНЯЕМЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

## 2.1. Некоторые основные понятия линейной алгебры

Линейная алгебра — часть алгебры, изучающая векторы, векторные, или линейные, пространства, линейные отображения и системы линейных уравнений. Линейная алгебра широко используется в абстрактной алгебре и функциональном анализе и находит многочисленные приложения в естественных науках. Исторически первым вопросом линейной алгебры был вопрос о линейных уравнениях. Построение теории систем таких уравнений потребовало таких инструментов, как теория матриц и определителей, и привело к появлению теории векторных пространств. Линейные уравнения как уравнения прямых и плоскостей стали предметом изучения после изобретения Декартом и Ферма метода координат (около 1636). Гамильтон в своей работе (1833) представлял комплексные числа в виде двумерного вещественного векторного пространства, ему принадлежит авторство термина «вектор». Теория матриц была разработана в трудах Кэли (1850-е). Системы линейных уравнений в матрично-векторном виде впервые появились в работах Лагерра (1867).

### 2.1.1. Векторы

Вектором будем считать любой столбец, элементы которого — числа:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Число элементов вектора называется его размерностью. Так, размерности векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ равны соответственно 3, 2, 3.

## Операции с одним вектором

Умножение вектора на произвольное число:

$$2\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad -\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 0 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

каждый элемент вектора умножается на это число.

Транспонирование превращает столбец в строку, а строку — в столбец:

$$\vec{a}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \ \left(\vec{a}^T\right)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

## Операции с двумя векторами

**Операция сложения.** Любые два вектора-столбца (или два вектора-строки) одинаковой размерности можно складывать или вычитать друг из друга:

$$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ -3 \\ 0 \ +0 \\ -2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$3\vec{a} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \ -(-6) \\ 0 \quad -0 \\ -6 \ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

**Операция скалярного умножения** существует для векторов одинаковой размерности. Обычно первый вектор-множитель записывается в виде строки, а второй – как столбец. Часто используется точка в качестве множителя. Найдем, например, произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}^T \vec{c} = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 - 2 \cdot 7 = -3 - 14 = -17 .$$

Результат — число (латинское scalar — число), полученное при сложении произведения сначала первых двух элементов, затем вторых двух элементов и т. д. до последней пары элементов.

Скалярное произведение перестановочно, т. е. перестановка местами векторов не меняет результата. Это свойство — следствие неизменности произведения любых двух чисел при их перестановке.

Частный случай скалярного умножения произвольного вектора на самого себя приводит к сумме квадратов всех его элементов. Например:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (-3)^2 + 0^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58 .$$

Диада получается при перемножении двух векторов, из которых первый — столбец, а второй — строка. Никаких ограничений на размерности векторов при таком умножении нет. Примеры:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-3) \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) \\ -3 \cdot 1 & -3 \cdot 0 & -3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 0 & (-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить определенную симметрию в диадах, полученных при перестановке векторов. Так, элементы первого столбца диады $\vec{a} \cdot \vec{b}^T$ совпадают с элементами первой строки диады $\vec{b} \cdot \vec{a}^T$, и аналогичное соответствие наблюдается для вторых векторов.

Операция “превращения” столбцов в строки и обратно уже встречалась выше — это транспонирование. Следовательно, перестановка векторов местами приводит к транспонированию диады

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}^T\right)^T .$$

## 2.1.2. Матрицы

Матрицей называется любая прямоугольная таблица чисел. В частности, диады также относятся к матрицам. В обозначениях обычно используются заглавные латинские буквы. Примеры матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Можно считать, что любая матрица построена на векторах-столбцах.

Например, матрицу $B$ можно представить в следующем виде:

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix},$$

где обозначены векторы $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

В равной мере можно представлять любую матрицу как систему векторов-строк. Например, матрица $A$ тогда принимает такой вид:

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vec{a}_3^T \end{pmatrix},$$

где введены векторы-строки:

$$\vec{a}_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \vec{a}_2^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}; \; \vec{a}_3^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

В частности, любой вектор-столбец можно рассматривать как матрицу из одного столбца, а вектор-строку — как матрицу из одной строки. Правила умножения матриц на число, а также их сложения аналогичны этим правилам для векторов.

Определитель — числовая характеристика любых квадратных матриц.

В частности, определитель матрицы размером 2 × 2 равен:

$$\Delta = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Без труда можно убедиться, что если какая-нибудь строка (или какой-нибудь столбец) состоит из нулей, определитель также равен нулю.

Также легко доказать, что если какую-нибудь строку (или столбец) умножить на произвольное число, то на это число умножается и определитель. Например, пусть первая строка умножается на число *k*.

Имеем:

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}\cdot a_{22} - ka_{12}\cdot a_{21} = k\left(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}\right) = k\cdot\Delta .$$

Так же, как и матрицы, определитель можно строить на векторах-столбцах или на векторах-строках:

$$\Delta_B = |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{vmatrix};$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix};\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Что касается правила умножения двух матриц, то его в равной мере можно описывать как с помощью скалярного произведения, так и с использованием диад.

Например, рассмотрим умножение *A* на *B*:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vec{a}_3^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T\vec{b}_1 & \vec{a}_1^T\vec{b}_2 \\ \vec{a}_2^T\vec{b}_1 & \vec{a}_2^T\vec{b}_2 \\ \vec{a}_3^T\vec{b}_1 & \vec{a}_3^T\vec{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь:

$$\vec{a}_1^T\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\cdot 0 + 1\cdot 2 = 2;\ \vec{a}_1^T\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0\cdot 1 + 1\cdot 4 = 4;$$

$$\vec{a}_2^T\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 0 - 3\cdot 2 = -6;\ \vec{a}_2^T\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot 4 = -10;$$

$$\vec{a}_3^T\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\cdot 0 + 5\cdot 2 = 10;\ \vec{a}_3^T\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1\cdot 1 + 5\cdot 4 = 19.$$

Отсюда $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -10 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}$.

Тот же результат можно получить как сумму диад. При этом, наоборот, первая матрица представляется как система столбцов, а вторая — как система строк. Получим:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 \\ -3 \cdot 2 & -3 \cdot 4 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -10 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}.$$

## Определители в трехмерном пространстве

Пусть задана какая-либо квадратная матрица, например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Можно выбрать, скажем, ее элемент 4, после чего мысленно вычеркнуть 2-ю строку и 1-й столбец, на пересечении которых он находится. Определитель, построенный на оставшихся невычеркнутыми элементах, называется минором:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 = -2,$$

его индекс определяет номера строки 2 и столбца 1.

Число миноров данной матрицы равно числу ее элементов; так, для матрицы $A$ существует 9 миноров.

Алгебраическое дополнение $A_{ij}$ совпадает с соответствующим минором $M_{ij}$, если сумма его индексов $i+j$ четная; если она нечетная, то $A_{ij}$ и $M_{ij}$ различаются только знаком. В приведенном примере $A_{21}=-M_{21}=2$, так как сумма индексов $i+j=2+1=3$ — нечетная. Общая формула

$$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}.$$

Правило разложения определителя по строке или столбцу: определитель Δ равен сумме произведений элементов строки на их алгебраические дополнения. Аналогично это правило действует и для столбцов.

В теории определителей доказано, что получающаяся при этом сумма от номера строки или столбца не зависит.

Так, вычислим для матрицы $A$ алгебраические дополнения в 1-й строке:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & -3\\ 6 & 8\end{vmatrix}=18,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 8\end{vmatrix}=-38,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 6\end{vmatrix}=24.$$

Согласно правилу разложения определителя получим:

$$\Delta=1\cdot 18+2\cdot\left(-38\right)+3\cdot 24=14.$$

С другой стороны, алгебраические дополнения, например, 2-го столбца равны:

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 8\end{vmatrix}=-38,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 8\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}=15.$$

Разлагая определитель по 2-му столбцу, получим:

$$\Delta=2\cdot\left(-38\right)+0+6\cdot 15=-76+90=14,$$

т. е. убеждаемся, что в соответствии с теорией разложения и по 1-й строке, и по 2-му столбцу дают одинаковый результат. Полезно самостоятельно проверить, что при разложении по остальным линиям (т. е. столбцам и строкам) результат не изменится.

Так же, как в геометрии на плоскости, определитель может быть построен на векторах-столбцах или на строках. В нашем случае можно записать:

$$\Delta A \cdot B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vec{a}_3^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \vec{b}_1 & \vec{a}_1^T \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2^T \vec{b}_1 & \vec{a}_2^T \vec{b}_2 \\ \vec{a}_3^T \vec{b}_1 & \vec{a}_3^T \vec{b}_2 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \\ \vec{b}_3^T \end{vmatrix},$$

где $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$;

$\vec{b}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
$\vec{b}_2^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;
$\vec{b}_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Разложение произвольного вектора $\vec{b}$ по заданным векторам $\vec{a}_1, \ldots, \ \vec{a}_n$. Под разложением какого-либо вектора понимается следующая задача.

Допустим, задается произвольный $n$-мерный вектор $\vec{b}$. Требуется разложить его по $n$-мерным векторам $\vec{a}_1, \ldots, \ \vec{a}_n$, т. е. представить его в виде суммы:

$$\vec{b} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \vec{a}_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные коэффициенты.

Вводя вектор коэффициентов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, данное равенство можно записать в эквивалентном виде векторно-матричного произведения:

$$\vec{b} = A \cdot \vec{x} \cdot$$

Для определения коэффициентов $x_1,...,x_n$ скалярно умножим левую и правую части равенства на $\vec{A}_1^T$:

$$\vec{A}_1^T\vec{b} = x_1 \cdot \vec{A}_1^T\vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_1^T\vec{a}_2 + ... + x_n \cdot \vec{A}_1^T\vec{a}_n .$$

В правой части остается только одно первое слагаемое, а все остальные обращаются в нуль:

$$\vec{A}_1^T\vec{b} = x_1 \cdot \Delta ,$$

откуда следует, что

$$x_2 = \frac{\vec{A}_2^T\vec{b}}{\Delta} = \frac{\left|\vec{a}_1 \quad \vec{b} \quad ... \quad \vec{a}_n\right|}{\Delta} .$$

Далее, продолжая аналогично умножать на $\vec{A}_2, \vec{A}_3, ..., \vec{A}_n$, получим:

$$x_2 = \frac{\vec{A}_2^T\vec{b}}{\Delta} = \frac{\left|\vec{a}_1 \ \vec{b} \ ... \ \vec{a}_n\right|}{\Delta}$$

и т. д. вплоть до $x_n$.

Эти формулы известны под названием правила Крамера, довольно часто используемого для определения коэффициентов $x_1,..., x_n$.

Весьма тесно с этим правилом связан метод обратной матрицы, суть которого заключается в следующем.

С помощью векторных произведений $\vec{A}_1,...,\vec{A}_n$ образуется обратная матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \vec{A}_1^T \\ \vec{A}_2^T \\ ... \\ \vec{A}_n^T \end{pmatrix}$.

Нетрудно показать, что матрица $A^{-1}$ действительно является обратной, т. е. что ее произведение на исходную матрицу $A$ дает единичную матрицу $E$. В самом деле, представив матрицу $A$ как систему столбцов, после умножения получим:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \vec{A}_1^T \\ \vec{A}_2^T \\ \cdots \\ \vec{A}_n^T \end{pmatrix} \cdot \left( \vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \ldots \;\; \vec{a}_n \right) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Теперь умножим обе части равенства на обратную матрицу $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot \vec{b} = A^{-1} \cdot \vec{A}^T \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} .$$

Поскольку умножение единичной матрицы на любой вектор оставляет его неизменным:

$$E \cdot \vec{x} = \vec{x} ,$$

то получаем, что вектор коэффициентов равен:

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} .$$

В теоретическом плане оба метода абсолютно равносильны, поскольку оба они опираются на свойства ортогональности. Чисто практически применение обратной матрицы становится более выигрышным в тех случаях, когда при неизменной матрице $A$ требуется найти несколько решений $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$, соответствующих различающимся векторам $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$.

### 2.1.3. Системы линейных уравнений

Полученные выше соотношения могут быть интерпретированы как методы решения систем линейных уравнений, в ходе которого по заданным матрице $A$ и вектору $\vec{b}$ определяется вектор коэффициентов $\vec{x}$. Проиллюстрируем применение выведенных соотношений на простейшем — двумерном случае. Геометрическое истолкование