УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

В.В. Богун

# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА: ТЕОРИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ


ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

**УДК 336:51(075.8)**
**ББК 65.26в631я73**
**Б74**

**Рецензенты:**

*Кальсин Андрей Евгеньевич*, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической теории и менеджмента ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им К.Д. Ушинского»;

*Тихомиров Сергей Александрович*, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им К.Д. Ушинского».

**Богун В.В.**

Б74 **Финансовая математика: теория и решение задач:** Учебное пособие / В.В. Богун. — М.: Прометей, 2024. — 112 с.

ISBN 978-5-00172-560-2

В учебном пособии изложены основные положения теоретических и практических занятий по финансовой математике с точки зрения применения табличного редактора Excel к решению задач. Представленный материал обеспечивает преподавание учебной дисциплины «Финансовая математика», основываясь на актуальных и наглядных алгоритмах решения задач по изучаемой дисциплине через призму интеграции математических и информационных знаний, умений и навыков обучаемых.

Новизна учебного пособия заключается в том, что показано применение табличного редактора Excel для решения задач по финансовой математике с корректным отображением множества числовых значений не только параметров итоговых результатов расчетов, но и промежуточных результатов реализации вычислительных алгоритмов с целью наглядного представления процессов поэтапного решения поставленных задач в необходимом формате.

Пособие предназначено для использования в учебном процессе обучающимися по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика».

**ISBN 978-5-00172-560-2**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ТЕМА 1.
# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ С ФИНАНСОВЫМИ ДАННЫМИ

## Числовые последовательности

Под числовой последовательностью $\{a_n\}$ понимается закономерность, однозначно определяющая соответствие между множеством значений натуральных чисел (порядковых номеров членов числовой последовательности) и множеством членов (элементов) числовой последовательности, выраженная в виде строго обозначенной функциональной зависимости между данными числовыми объектами.

В большинстве случаев числовая последовательность задается в виде формулы ее общего члена $a_n = f(n)$, которая позволяет по номеру элемента последовательности однозначно определить значение соответствующего номеру члена данной последовательности.

Представим описание числовой последовательности в виде следующей таблицы, связывающей значения номеров $n$ и членов последовательности $a_n = f(n)$.

Под пределом $A$ числовой последовательности $\{a_n\}$ понимается такое числовое или бесконечное значение, при котором для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой критический номер члена последовательности $n_{кр}$, зависящий от $\varepsilon$ $\left(n_{кр} = n(\varepsilon)\right)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > n_{кр}$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности $\{a_n\}$ обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$. Каждая числовая последовательность может иметь только одно значение предела числовой последовательности.

С точки зрения значения предела числовой последовательности можно получить следующую классификацию числовых последовательностей:

1. Бесконечно малые числовые последовательности — числовые последовательности, значение предела которых равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B = 0$ ($\{b_n\} = \dfrac{4n-3}{3n^3+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{3n^3+2} = 0$).

2. Ограниченные числовые последовательности — числовые последовательности, значения предела которых равен определенному, отличному от нуля, числу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = D = C$ ($\{d_n\} = \dfrac{5n^6+7}{2n^6-4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^6+7}{2n^6-4} = \dfrac{5}{2}$).

3. Бесконечно большие числовые последовательности — числовые последовательности, предел которых равен бесконечному значению, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = G = \pm\infty$ ($\{g_n\} = \dfrac{7n^5+6}{4n^2-3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^5+6}{4n^2-3} = \infty$).

Процесс нахождения значения предела числовой последовательности может изначально приводить к ситуации неопределенности, в рамках которой однозначно без реализации определенных алгоритмов невозможно определить значение предела рассматриваемой числовой последовательности.

При решении задач по финансовой математике важное значение имеет понятие второго замечательного предела, который представляет одну из известных ситуаций неопределенности, не позволяющей однозначно получить значение предела и однозначно классифицировать числовую последовательность.

Под вторым замечательным пределом понимается предел числовой последовательности вида $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, нахождение которого изначально связано с наличием неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$, однако применение определенного доказательства приводит к получению конкретного значения предела данной числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left[1^\infty\right] = e \approx 2{,}7182818284.$$

Для нас важным является следующая реализация числовой последовательности: $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}$.

Получим следующее значение предела числовой последовательности $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn} = \left[1^\infty\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot m\cdot k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^{m\cdot k} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^{m\cdot k} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = \frac{n}{k} \\ n\to\infty \\ t\to\infty \end{array}\right| = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{m\cdot k} = e^{m\cdot k}.$$

Под числовой прогрессией понимается определенная числовая последовательность, в рамках которой реализуются однозначно определенные правила или закономерности, в соответствии с которым осуществляется последовательный переход между значениями соседних элементов.

В рамках финансовой математики с точки зрения реализации финансовых расчетов в качестве основных математических объектов выступают арифметическая и геометрическая прогрессии.

## Арифметическая прогрессия

**Арифметической прогрессией** называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, которое является постоянным для данной последовательности.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, если для любого номера (или индекса) члена числовой последовательности $n$, являющегося натуральным числом, выполняется условие последовательного перехода на значение каждого последующего члена согласно рекуррентному выражению: $a_{n+1} = a_n + d$, где число $d$ представляет собой разность арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия является возрастающей, если значение разности арифметической прогрессии $d$ определяется положительным числом $(d > 0)$, а если значение разности арифметической прогрессии $d$ определяется отрицательным числом $(d < 0)$, то она является убывающей арифметической прогрессией.

Таким образом, для однозначного задания функциональной закономерности, представленной в рамках определенной арифметической прогрессии, необходимо знать числовые значения первого элемента и разности арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия является конечной, если в рамках данной числовой последовательности отбрасываются все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности с номером или индексом элемента $n$, то есть за $a_n$.

Зная числовые значения первого члена и разности арифметической прогрессии, можно найти числовое значение любого ее $n$-го члена согласно *формуле n-го члена арифметической прогрессии*: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

Для нахождения *суммы n-го количества первых членов арифметической прогрессии* применяется следующая формула:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

## Геометрическая прогрессия

**Геометрической прогрессией** называется числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и тоже число, которое является постоянным для данной последовательности.

Числовая последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией, если для любого (или индекса) члена числовой последовательности $n$, являющегося натуральным числом, выполняется условие последовательного перехода на значение каждого последующего члена согласно рекуррентному выражению: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где число $q$ представляет собой знаменатель геометрической прогрессии, при этом $b_1 \neq 0$ и $q \neq 0$.

Геометрическая прогрессия является возрастающей, если значение знаменателя геометрической прогрессии $q$ по модулю определяется числом, большим единицы $(|q| > 1)$, а если значение знаменателя геометрической прогрессии $q$ по модулю определяется числом, меньшим единицы $(|q| < 1)$, то она называется убывающей геометрической прогрессией.

Таким образом, для однозначного задания функциональной закономерности, представленной в рамках определенной геометрической прогрессии, необходимо знать числовые значения первого элемента и знаменателя геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия является конечной, если в рамках данной числовой последовательности отбрасываются все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности с номером или индексом элемента $n$, то есть за $a_n$.

Зная числовые значения первого члена и знаменателя геометрической прогрессии, можно найти числовое значение любого его $n$-го члена согласно *формуле n-го члена геометрической прогрессии*: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Для нахождения суммы $n$-го количества первых членов геометрической прогрессии применяется следующая формула:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n =$$

$$= \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}.$$

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей,* если её знаменатель $q$ по абсолютной величине меньше единицы $\left(|q|<1\right)$.

*Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* называется число, к которому неограниченно приближается сумма $n$ первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии при неограниченном увеличении $n$. Сумма n первых бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна: $S_n = \frac{b_1}{q-1}$.

## Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений первых членов двух арифметических прогрессий (возрастающей и убывающей) с соответствующими разностями (положительной и отрицательной) и двух геометрических прогрессий (возрастающей и убывающей) с соответствующими знаменателями (больше и меньше единицы) осуществить автоматизированные расчеты параметров прогрессий согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

В таблице 1.2 представлены основные особенности вычисления расчетных параметров арифметической и геометрической прогрессий.

На рисунках 1.1–1.5 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 1.1 — параметры исходных данных, рисунок 1.2 — выполнение расчетов параметров арифметической прогрессии, рисунок 1.3 — выполнение расчетов параметров геометрической прогрессии) с применением описанных на рисунке 1.4 и 1.5. формул.