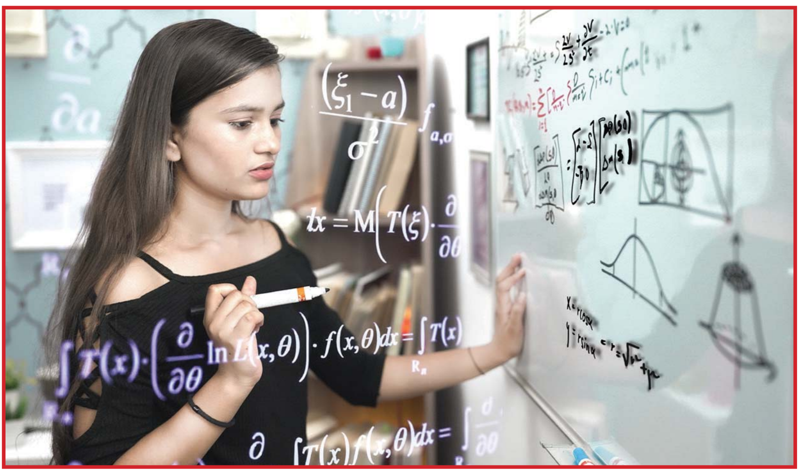
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МАТЕМАТИКА

ОБЩИЙ КУРС. АНАЛИЗ ДАННЫХ

Часть 1



ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

УДК 517(073)
ББК 22.161я73
М34

Авторы:

Борисова Л.Р., канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента математики Финансового университета при Правительстве РФ;

Кремер Н.Ш., канд. экон. наук, доцент Департамента математики Финансового университета при Правительстве РФ;

Степанов С.Е., докт. физ.-мат. наук, профессор Департамента математики Финансового университета при Правительстве РФ;

Фридман М.Н., доцент Департамента математики Финансового университета при Правительстве РФ;

Цыганок И.И., канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента математики Финансового университета при Правительстве РФ.

Рецензенты:

Шевченко Ю.И., канд. физ.-мат. наук, профессор Института высоких технологий Балтийского федерального университета им. И. Канта;

Александрова И.А., канд. физ.-мат. наук, доцент, первый заместитель декана Факультета информационных технологий и анализа больших данных Финансового университета при Правительстве РФ.

МАТЕМАТИКА. Общий курс. Анализ данных.
М34 Часть 1: Учебное пособие для студентов онлайн-образования / Л.Р. Борисова, Н.Ш. Кремер, С.Е. Степанов [и др.]. — М.: Прометей, 2023. — 516 с.

ISBN 978-5-00172-528-2

В первой части пособия проведен обзор основных понятий и положений разделов «Математический анализ», «Линейная алгебра и линейное программирование» дисциплины «Математика». Даны методические указания по ее изучению, выделены типовые задачи с решениями, представлены вопросы, задачи и тестовые задания для контроля и самоподготовки (в том числе в среде Moodle и Excel), варианты контрольных работ и примеры экзаменационных (зачетных) заданий по данной дисциплине. Отражен опыт использования электронного учебного курса, реализованного в Департаменте математики Финансового университета при Правительстве РФ.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата и специалитета различных форм обучения по направлениям экономики и управления, в первую очередь для студентов онлайн-образования, а также магистрантов и аспирантов, преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

ISBN 978-5-00172-528-2

Оглавление

Тема 1
ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

Элементы теории множеств. Кванторы. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение. Конечные, счетные и несчетные множества. Ограниченные и неограниченные множества.

Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Комплексные числа и действия над ними. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел.

Понятие функции. Числовая функция одной переменной. Способы задания функций. График функции. Свойства функций одной переменной: четность и нечетность, монотонность, выпуклость, периодичность, ограниченность.

Функциональные зависимости в экономике: функции полезности, однофакторные производственные функции, функции спроса и предложения. Функции средних издержек и связь между ними: [1 или 6, § 5.1–5.7, 16.1, 16.2], [2 или 7, гл. 5,16], или [3, § 5.1–5.7, 15.1–15.3], или [4, § 5.1, 5.2, 5.4] и [5, § 1.1–1.7]).

Основные понятия теории множеств подробно рассмотрены в рекомендуемых учебниках ([1 или 6, или 3, § 5.1]). О некоторых логических символах и кванторах, используемых в дальнейшем для сокращенной записи математических понятий и операций, тоже можно прочитать в рекомендуемых учебниках ([1, или 6, или 3, § 5.1, 6.1]). Обращаем внимание на то, что если утверждение содержит *квантор общности* $\forall$, то оно верно для *всех* обозначенных элементов. Если же утверждение содержит *квантор существования* $\exists$, то оно будет верным для каких-то *отдельных* элементов из указанного множества. Мы не приводим здесь понятия и определения теории множеств и логики, так как задачи с их использованием выходят за рамки нашего курса.

Произвольные множества принято обозначать большими латинскими буквами A, B, C ..., а элементы множеств — малыми латинскими буквами a, b, c... или буквами с индексами a_1, a_2, a_3....

Если a является элементом множества A, то это записывают в виде $a \in A$ и читают « элемент a принадлежит множеству A».

Если же a не содержится в множестве A, то это записывают в виде $a \notin A$ и читают «элемент a не принадлежит множеству A».

Множество, которое не содержит элементов, называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$. Пустым будет, например, множество действительных решений уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Различают конечные и бесконечные множества. Можно сказать, что к *конечным* множествам относят те, количество элементов которых выражается натуральным числом (например, множество дней недели или множество учащихся класса). Количество элементов в множестве A обозначают $m(A)$ и читают как «численность множества A». Если же количество элементов множества не записывается натуральным числом, то такие множества относят к *бесконечным* (например, множество натуральных чисел). Строгие определения конечного и бесконечного множеств возможны только после рассмотрения бинарных соответствий.

Множество можно считать заданным, если есть способ, позволяющий для любого данного элемента решить, принадлежит или не принадлежит он данному множеству. Применяются два основных способа задания множеств:

1. перечисление элементов множества;

2. указание *характеристического свойства* элементов множества, т.е. такого свойства, которым обладают *все* элементы данного множества и только они.

Например, множество $A = \{ a, b, c, d \}$ задано перечислением элементов, которые записаны в фигурных скобках, через запятую. Совершенно очевидно, что перечислением элементов можно задавать только конечные множества.

Множество, заданное указанием характеристического свойства элементов, записывают так: в фигурных скобках после обозначения элемента x множества ставится вертикальная черта, а затем указывается характеристическое свойство $P(x)$: $A = \{ x \mid P(x) \}$. Например, запись $A = \{ x \mid x \in \mathbb{R}$ и $x < 7\}$ означает, что элементами множества A являются действительные числа, удовлетворяющие неравенству $x < 7$, а запись $B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 2 \}$ означает, что элементами множества B являются натуральные числа, которые делятся на 2. Отметим, что второй способ применим для задания как бесконечных, так и конечных множеств. Для обозначения произвольного элемента множества мы использовали x, но возможно использование любой буквы латинского алфавита. Для обозначения характеристического свойства элементов множества мы использовали $P(x)$, но возможно использование букв греческого алфавита: α, β, γ...

В математике особую роль играют множества, элементами которых являются математические объекты (числа, точки, уравнения, функции и пр.). Множества, элементами которых являются числа, определяются как *числовые*. Для них введены общепринятые обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

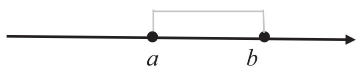
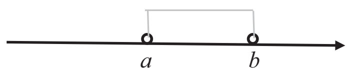
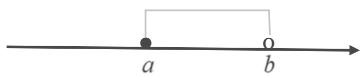
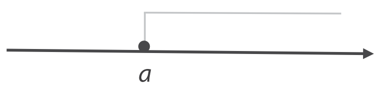
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

В данной теме расширяется понятие числовых множеств. В школьном курсе рассмотрение таких множеств ограничивается множеством действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$, объединяющего множества рациональных $\mathbb{Q}$ и иррациональных $\mathbb{I}$ чисел ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$).

Геометрической моделью множества $\mathbb{R}$ является числовая (координатная) прямая. Это значит, что любое действительное число может быть изображено точкой на этой прямой, и наоборот, любая точка числовой прямой соответствует какому-либо действительному числу. Кроме того, если $a, b \in \mathbb{R}$ и для них выполнено условие $a < b$, то на числовой прямой можно рассмотреть следующие множества:

Таблица 1.1

Множества на числовой прямой

$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$	$[a;b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	$a;b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	$[a;b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	$(a;b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$	$[a;+\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$(a;+\infty)$	

$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ \ x \le a\}$	$(-\infty; a]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$(-\infty; a)$	

В вузовском курсе множество $\mathbb{R}$ дополняется до множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{R}$ является подмножеством (частью) множества $\mathbb{C}$ ($R \subset \mathbb{C}$).

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид

$$z = x + iy\,, \tag{1.1}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, а $i = \sqrt{-1}$ — «мнимая» единица. Число x называется действительной (Re) частью комплексного числа z, число y — его мнимой (Im) частью.

Графически на плоскости комплексное число $z = x + iy$ изображается в виде точки M с координатами $(x;\, y)$; иногда для изображения используют и радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M с такими координатами:

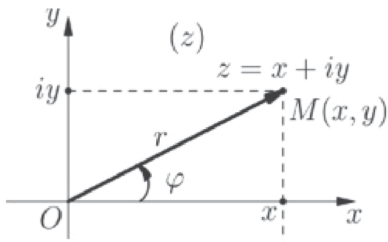


Рис. 1.1. Комплексное число на плоскости

Расстояние от начала координат до точки, изображающей число, называется ***модулем*** $|z|$, длина самого отрезка — ***радиусом*** (r), а угол между положительным направлением оси Ox и радиусом — ***аргументом*** (φ) комплексного числа. Имеют место следующие формулы:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \cos\varphi = \frac{x}{r};\ \sin\varphi = \frac{y}{r};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{y}, \qquad (1.2)$$

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi.$$

Подставив последние выражения в алгебраическую форму комплексного числа, получают его ***тригонометрическую форму***

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (1.3)$$

Кроме того, для любого действительного φ верна формула Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \qquad (1.4)$$

Поэтому с учётом (1.3)

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (1.5)$$

Такая форма записи называется ***экспоненциальной (показательной) формой*** записи комплексного числа.

В тригонометрической форме удобно умножать, возводить в степень, делить комплексные числа, а также извлекать корень n-й степени, а экспоненциальная форма используется для краткости записи.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r_1 e^{i\varphi};$$

$$z_2 = r_2\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) = r_2 e^{i\psi}.$$

Дальнейшие правила выводятся с использованием тригонометрических формул.

Правило умножения. Результат произведения двух комплексных чисел есть комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$z_1 z_2 = r_1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\cdot r_2\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right] = r_1 r_2 e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Правило возведения в степень. Для того чтобы комплексное число возвести в натуральную степень n, нужно модуль числа возвести в эту степень, а аргумент умножить на эту степень:

$$(z_1)^n = r_1^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = r_1^n\, e^{in\varphi}.$$

Правило деления. Результат деления двух комплексных чисел есть комплексное число, модуль которого равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}{r_2\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\right) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi-\psi)}.$$

Правило извлечения корня. Корень степени n из комплексного числа имеет n различных значений, равных

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) =$$
$$= \sqrt[n]{r_1}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Особый интерес представляют корни n-й степени из единицы, т.е. решения уравнения $x^n - 1 = 0$.

Если записать единицу в тригонометрической форме:

$$1 = 1 + i0 = \cos 0 + i\sin 0;$$

то $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\left(\cos 0 + i\sin 0\right)} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Например, при $n = 3$ получаем

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{(\cos 0+i\sin 0)}=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi C}{3},k=0,1,2.$$

И можно выписать все значения корня третьей степени из единицы:

$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}\alpha_1=1,\ k=0,\\ \alpha_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ k=1,\\ \alpha_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ k=2.\end{cases}$$

Рассмотрим примеры решений типовых задач.

Пример 1.1. Найти действительную и мнимую части комплексных чисел:

$$z_1=3+6i,\ z_2=-3i,\ z_3=14.$$

Решение.

$$\operatorname{Re} z_1=3,\operatorname{Im} z_1=6;$$

$$\operatorname{Re} z_2=0,\operatorname{Im} z_2=-3;$$

$$\operatorname{Re} z_3=14,\operatorname{Im} z_3=0;$$

Пример 1.2. Выполнить действия с комплексными числами в алгебраической форме:

$$(1+i)(2+i)+\frac{10}{1+2i}+(-1-i)^2.$$

Решение.

Выполним действия последовательно:

$$(1+3i)(2-i)=1\cdot 2-1\cdot i+3i\cdot 2-3i\cdot i=2-i+6i+3=5+5i;$$

$$\frac{10}{1-2i}=\frac{10(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{10(1+2i)}{5}=2+4i;$$

$$(-1-i)^2=(-1)^2-2\cdot(-1)\cdot i+i^2=2i.$$

Окончательно получим

$$(1+i)(2+i)+\frac{10}{1+2i}+(-1-i)^2=5+5i+2+4i+2i=7+11i.$$

Ответ: $7+11i$.

Пример 1.3. Вычислить, пользуясь правилами действий над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}.$$

Решение.

1. Найдем модуль и аргумент числа $\sqrt{3}-i$:

$$x=\sqrt{3},\ y=-1,\ r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{-1}{2};\varphi=-\frac{\pi}{6};$$

$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

2. Найдем модуль и аргумент числа $1+i$:

$$x=1,\ y=1,\ r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2};\varphi=\frac{\pi}{4};$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Произведем умножение в числителе:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$$

$$= 2\left(\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

4. Произведем умножение в знаменателе:

$$(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

5. В результате имеем

$$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{2\left(\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}-\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}-\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Ответ: $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.

Пример 1.4. Найти все значения корня $\sqrt[5]{32}$.

Решение.

Представим 32 в тригонометрической форме:

$$32 = 32(\cos 0 + i\sin 0).$$

Применим формулу извлечения корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right):$$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{5}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, 4.$$

Ответ: $2\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}\right),\ k = 0, 1, \ldots, 4$.

Далее в теме рассматривается важнейшее понятие математического анализа — понятие функции.

Пусть множества X и Y являются подмножествами множества действительных чисел (X, $Y \subset \mathbb{R}$). Если каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана ***функция f*** с множеством значений Y.

Принимаются стандартные обозначения:

f — функция;

x — независимый аргумент;

$y = f(x)$ — значение функции для аргумента x

$X = D(f)$ — область определения функции;

$Y = E(f)$ — область значений функции.

Функции можно задавать, используя разные способы. Среди них чаще всего применяют:

– ***табличный*** способ (используется, когда область определения $D(f)$ состоит из конечного числового множества, например таблица курса доллара, где множество

$X = D(f)$ — дни торгов, множество $E(f)$ — цены доллара в конце каждого дня (торговой сессии));

– ***аналитический*** способ (используется, когда функцию f можно задать формулой $y = f(x)$. Например, спрос населения на товары роскоши описывается функцией Торнквиста $y = ax(x - b)(x + c)^{-1}$, где x — доход; y — спрос в денежном выражении; a, b, c — некоторые положительные постоянные);

– ***графический*** способ (предполагает задание на числовой плоскости множества точек $M(x, y)$ для $x \in D(f)$ и $y \in E(f)$. При этом такое множество называется *графиком функции*).

– ***словесный*** способ (предполагает просто описание функции. Например, функция Дирихле: $y = f(x) = 1$, если x — рациональное число и $y = f(x) = 0$, если x — иррациональное число).

Подробно материал изложен в учебниках ([1 или 6, или 3, § 5.5]).

В нашем курсе рассматриваются в основном элементарные функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и композиций из основных элементарных функций, среди которых:

– $y = C$ (где C — заданная постоянная):

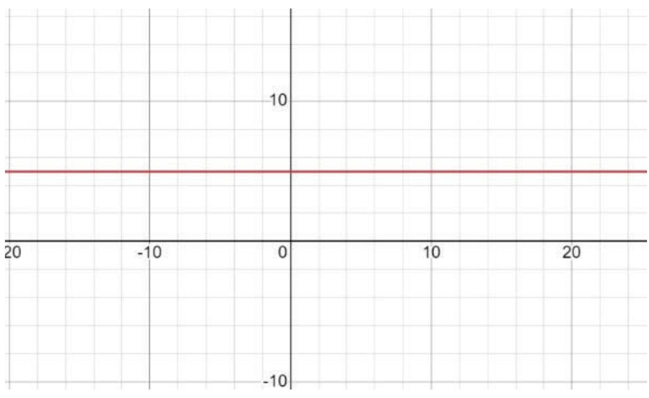


Рис. 1.2. График функции $y = 5$

— $y = x^n$ (степенная):

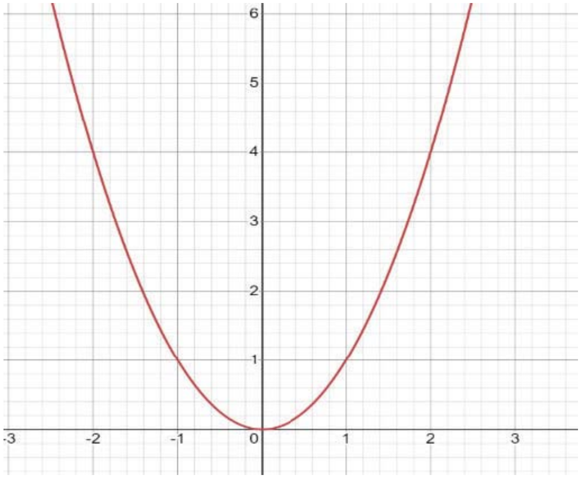


Рис. 1.3. График функции $y = x^2$

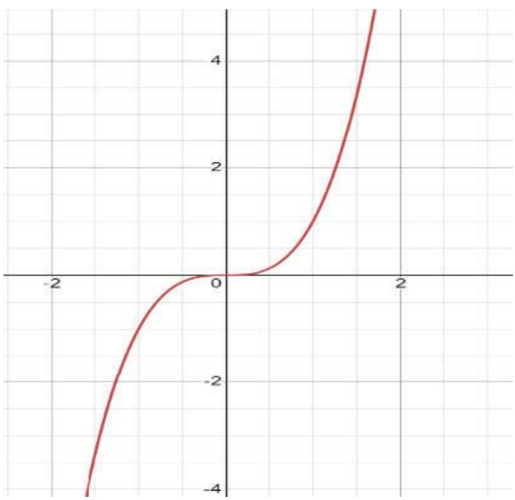


Рис. 1.4. График функции $y = x^3$

– $y = a^x$ (показательная):

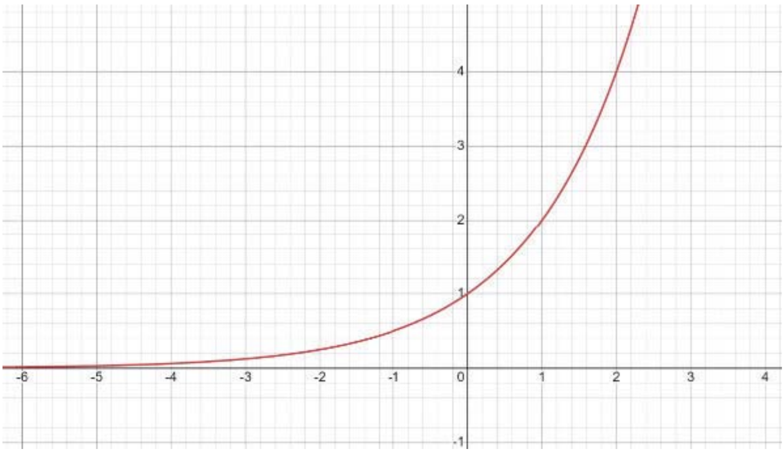


Рис. 1.5. График функции $y = 2^x$

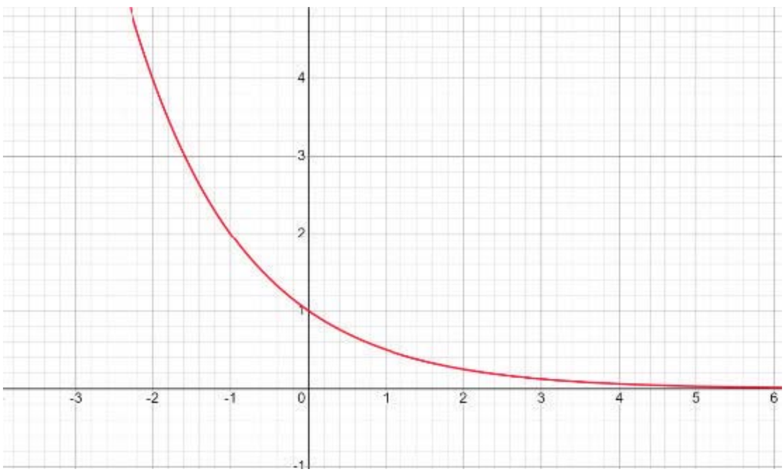


Рис. 1.6. График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

– $y = \log_a x$ (логарифмическая):

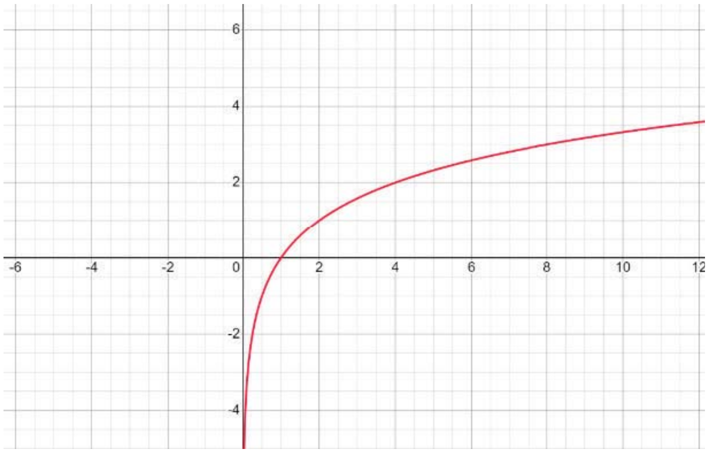


Рис. 1.7. График функции $y = \log_2 x$

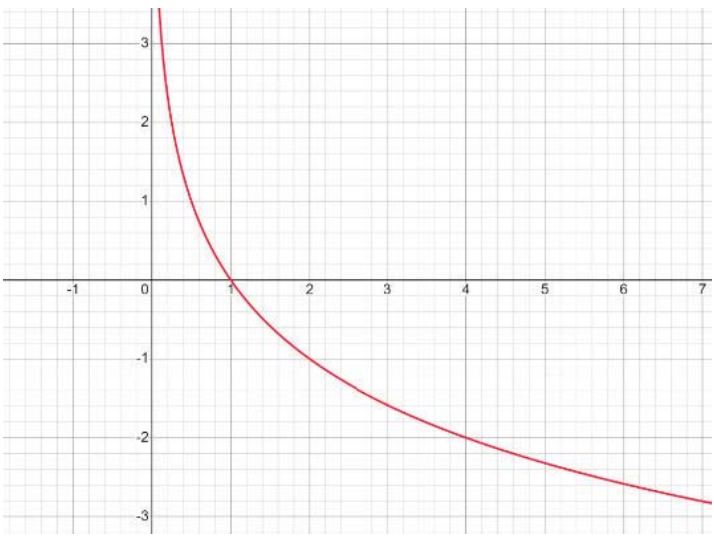


Рис. 1.8. График функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

– тригонометрические функции;

– обратные тригонометрические функции.

Для $y = f_1(x)$ функция $x = f_2(y)$ называется ***обратной*** в том случае, когда $E(f_1) = D(f_2)$ и $y \equiv f_1(f_2(y))$. Обратную для $y = f(x)$ функцию обычно обозначают как $x = f^{-1}(y)$. Надо отметить, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Если для функции $y = f(x)$ переменная x функционально зависит от переменной t, т.е. $x = g(t)$, то, производя замену, получим ***сложную*** функцию вида $y = f(g(t)) = F(t)$.

Например, $y = \sin x$ и $x = |t|$, тогда $y = \sin|t|$.

Важнейшими свойствами функций являются монотонность, чётность (нечётность), периодичность и ограниченность.

Функция называется ***монотонно возрастающей***, если для всех $x \in D(f)$ выполняется: $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$ — меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Функция называется ***монотонно убывающей***, если для всех $x \in D(f)$ выполняется:$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$ — меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ является ***четной***, если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$.

Пример 1.5. Проверить свойство чётности для функции $y = cosx$.

Решение.

Обозначим $f(x) = cosx$, тогда $f(-x) = \cos(-x) = cosx = f(x)$.

Поэтому свойство чётности выполнено.

Ответ: функция $y = cosx$ является чётной.

Полезно знать, что график четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ является ***четной***, если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$.