В. В. ШАНЬКОВ

ЛЕКЦИИ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 51-7(075.8)
ББК 22.311 я73
Ш 228

Рецензенты:

профессор кафедры общей физики НИЯУ МИФИ,
доктор физико-математических наук *В. В. Максименко*;

заведующий отделом Института автоматизации проектирования РАН, доктор физико-математических наук *А. В. Бабаков*

Шаньков В. В.

Ш 228 Лекции по уравнениям математической физики. Учебное пособие / В. В. Шаньков. – СПб.: Алетейя, 2023. – 256 с.

ISBN 978-5-00165-653-1

Изложен один из курсов уравнений математической физики Московского физико-технического института / Национального исследовательского университета. Приведены математически строгие детальные обоснования теорем и примеров решения задач экзаменационного уровня, основанные на базовых версиях курсов высшей математики МФТИ.

УДК 51-7(075.8)
ББК 22.311 я73

ISBN 978-5-00165-653-1

@biblioclub: Издание зарегистрировано ИД «Директ-Медиа» в российских и международных сервисах книгоиздательской продукции: РИНЦ, DataCite (DOI), Книжной палате РФ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие……………………………………………………………..……… 5
Основные обозначения …………………………………….………………… 8
1. Дифференциальные уравнения в частных производных 9
1.1. Замена системы координат …………………………………..…….… 10
1.2. Приведение к диагональному виду в точке в $\mathbb{R}^n$ ……..………. 13
1.3. О примере Адамара …………....……………………………………..… 16
2. Метод характеристик $\mathbb{R}^2$ ………………….……………………. 19
2.1. Приведение к каноническому виду в области …..…………………... 19
2.2. Задача Коши ………...……………..……………………………….. 24
2.3. Задача Гурса ……..…………………………………………..……..…… 37
2.4. Смешанная задача на полупрямой ..…………..…………………… 42
3. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{n+1}$…………………... …... 51
3.1. Энергетическое неравенство в $\mathbb{R}^{n+1}$ ………………………..……..… 51
3.2. Принцип Дюамеля для волнового уравнения…………….…….. 60
3.3. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{3+1}$ ……..……………. 63
3.4. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{2+1}$ ……..……………. 71
3.5. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^{1+1}$ …… ……………. 73
3.6. О корректности задач Коши для волнового уравнения…………... 77
4. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$……………… 79
4.1. Принцип максимума для уравнения теплопроводности ………... 80
4.2. Принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности …..…….. 88
4.3. Формула Пуассона для уравнения теплопроводности ………... 90
5. Интегральные уравнения ……..…………………………………….... 103
5.1. Уравнения с вырожденным ядром..…………………………….. 103
5.2. Уравнения с малым непрерывным ядром…………………….… 109
5.3. Уравнения с непрерывным ядром……………………………… 111
5.4. Интегральные операторы с симметричным ядром………………..122
6. Задача Штурма–Лиувилля…...……………..………..………….. 131
6.1. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля…………..…………131
6.2. Собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля…...137
6.3. Сингулярная задача Штурма–Лиувилля………...........…….... 141
7. Смешанная задача для волнового уравнения ……………………..… 152
7.1. Интеграл энергии ………………………………… ..……...…153
7.2. Метод Фурье на отрезке для волнового уравнения ……………..… 157
7.3. Колебания круглой мембраны, закреплённой по краю ……… 167
8. Смешанная задача для уравнения теплопроводности ……………… 173
8.1. Принцип максимума для ограниченной области ……………… 173
8.2. Метод Фурье для уравнения теплопроводности ……….. …….. 175

9. Потенциалы…….…………………………………………….……….. 182
9.1. Основное интегральное представление ..…………….……....... 182
9.2. Объёмный потенциал ………………………………….….……. 186
9.3. Потенциал двойного слоя ……………………………..……… 190
9.4. Потенциал простого слоя ……………………………….…….. 196
10. Уравнения Лапласа и Пуассона………………………………...... 201
10.1. Гармонические функции ……………………………….……… 201
10.2. Задачи Дирихле ………………………………………………........ 203
10.3. Функция Грина задачи Дирихле……………………………….… 208
10.4. Задачи Неймана…………………..………………………………. 212
10.5. Метод Фурье в круговых областях ………………….......….. 215
10.6. Метод Фурье в шаровых областях……………………….…. 224
11. Дополнение……………………..……………………………......... 234
Заключение……………….………………………………............... 248
Литература …..……………….………………………………………249
Предметный указатель ………………………………………….... 250

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматриваются линейные *дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка*

$$\sum\nolimits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = F(x), \qquad x \in G, \quad (1.1)$$

где 1) *область определения дифференциального уравнения* G – область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ элементов $x := (x_1, ..., x_n)$, $n \in \overline{2,\infty}$; 2) все *коэффициенты* $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ и *свободный член уравнения* $F(x)$ из функционального класса $C(G)$; 3) *матрица старших коэффициентов* $\|a_{ij}(x)\| := \|a_{ij}(x)\|_{i,\,j\in\overline{1,n}}$ такая, что для любого элемента $x \in G$ существуют индексы $i, j \in \overline{1,n}$ такие, что $a_{ji}(x) + a_{ij}(x) \neq 0$.

Используются различные классы непрерывных функций и функций с непрерывными частными производными.

Определение 1.1. Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1) *функциональный класс* $C(\Omega)$ – это множество всех функций $f(x)$, у которых область определения $D(f) = \Omega$, множество значений $R(f) \subset \mathbb{R}$ и в каждой точке $\dot{x} \in \Omega$ функция $f(x)$ непрерывна в $\dot{x}$;

2) для любого числа $m \in \mathbb{N}$ *функциональный класс* $C^m(\Omega)$ – это множество всех функций $f(x) \in C(\Omega)$, у которых каждая частная производная $f_{x_{i(1)} \dots x_{i(s)}}(x) \in C(\Omega)$, где порядок производной $s \in \overline{1,m}$; индексы переменных $i(1), ..., i(s) \in \overline{1,n}$; *функциональный класс* $C^0(\Omega) := C(\Omega)$.

Определение 1.2. *Решение уравнения* (1.1) *на области* $\Omega \subset G$ – это функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ такая, что для любой точки $x \in \Omega$ верно числовое равенство в (1.1).

Изучаются задачи поиска всех решений дифференциального уравнения, удовлетворяющих заданным условиям на границе области.

Определение 1.3. *След функции* $f(x)$, $x \in \Omega$, *на границе* $\partial\Omega$ *области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – это функция $\lim\limits_{x' \to x \wedge x' \in \Omega} f(x')$, $x \in \partial\Omega$.

Определение 1.4. Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1) *функциональный класс* $C(\bar{\Omega})$ – это множество всех функций $f(x) \in C(\Omega)$ таких, что в каждой точке $\dot{x} \in \partial\Omega$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \dot{x} \wedge x \in \Omega} f(x)$, т.е. предел функции $f(x)$ при x стремящемся к $\dot{x}$ по множеству Ω; 2) *функциональный класс* $C^m(\bar{\Omega})$, где $m \in \mathbb{N}$, – это множество всех функций $f(x) \in C(\bar{\Omega})$, , у которых каждая частная производная $f_{x_{i(1)} \ldots x_{i(s)}}(x) := \dfrac{\partial^s f}{\partial x_{i(s)} \ldots \partial x_{i(1)}}(x) \in C(\bar{\Omega})$, где порядок производной $s \in \overline{1, m}$, индекс переменной $i(1), \ldots, i(s) \in \overline{1, n}$; *функциональный класс* $C^0(\bar{\Omega}) := C(\bar{\Omega})$.

Замечание 1.1. Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x) \in C(\bar{\Omega})$, если и только если для любой ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на Ω'.

Замечание 1.2. Все рассматриваемые в настоящем пособии решения дифференциальные уравнения классифицируются как «*классические*».

1.1. Замена системы координат

Пусть на области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана *система координат*

$$\xi = \Phi(x), \qquad x \in G, \tag{1.1.1}$$

где $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $\Phi(x) := (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x))$ – взаимно однозначное дважды непрерывно дифференцируемое невырожденное отображение; т.е. каждой точке $x \in G$ поставлена во взаимно однозначное соответствие точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ по формуле (1.1.1), и

$$\forall\ i \in \overline{1, n} \hookrightarrow \Phi_i(x) \in C^2(G) \ \text{ и } \forall\ x \in G \hookrightarrow \det \left\| (\Phi_i)_{x_j}(x) \right\|_{i, j \in \overline{1, n}} \neq 0, \tag{1.1.2}$$

где $\left\| (\Phi_i)_{x_j}(x) \right\|_{i, j \in \overline{1, n}}$ – *матрица Якоби отображения в* (1.1.1).

Определение 1.1.1. *В системе координат* (1.1.1)–(1.1.2): 1) *образ множества* $E \subset G$ – это множество $\tilde{E} = \{\Phi(x) |\ x \in E\}$; 2) *образ функции* $u(x)$, $x \in E$, где множество $E \subset G$, – это функция

$\tilde{u}(\xi)=u\left(\Phi^{-1}(\xi)\right),\ \xi\in\tilde{E},$ где $\Phi^{-1}(\xi),\ \xi\in\tilde{G},$ – обратное отображение к $\Phi(x),\ x\in G.$

Замечание 1.1.1 (о представлении функции через её образ)**.** Пусть на области $G\subset\mathbb{R}^n$ задана система координат (1.1.1)–(1.1.2). Тогда для любых функции $u(x),\ x\in G,$ и точки $\dot{x}\in G$ верно равенство $u(\dot{x})=\tilde{u}(\Phi(\dot{x})),$ где функция $\tilde{u}(\xi)$ – образ функции $u(x)$.

Замечание 1.1.2 (о преобразовании функции при замене системы координат)**.** Пусть на области $G\subset\mathbb{R}^n$ задана система координат (1.1.1)–(1.1.2), область $\Omega\subset G,$ $\tilde{\Omega}$ – образ области $\Omega\subset G$ в системе координат (1.1.1)–(1.1.2), число $m\in\overline{0,2}$. Тогда: 1) если функция $u(x)\in C^m(\Omega),$ то её образ $\tilde{u}(\xi)\in C^m(\tilde{\Omega});$ 2) если у функции $u(x), x\in\Omega,$ её образ $\tilde{u}(\xi)\in C^m(\tilde{\Omega}),$ то функция $u(x)\in C^m(\Omega).$

Определение 1.1.2. Пусть на области $G\subset\mathbb{R}^n$ задана система координат (1.1.1)–(1.1.2); у оператора A область определения $\mathcal{D}(A)$ и множество значений $\mathcal{R}(A)$ принадлежат множеству всех функций $f(x),\ x\in G.$ Тогда *образом оператора* A *в системе координат* (1.1.1)–(1.1.2) называется оператор $\tilde{A}$ такой, что: 1) его область определения $\mathcal{D}(\tilde{A})\triangleq\left\{v(\xi),\ \xi\in\tilde{G}\middle|\ v(\Phi(x))\in\mathcal{D}(A)\right\}$ и 2) для любой функции $v(\xi)\in\mathcal{D}(\tilde{A})$ образ $\tilde{A}v(\xi)\triangleq\left(A\left(v(\Phi(x))\right)\right)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\xi)},\ \xi\in\tilde{G}.$

Теорема 1.1.1 (о преобразовании дифференциального уравнения при замене системы координат)**.** *Пусть на области* $G\subset\mathbb{R}^n$ *заданы дифференциальное уравнение* (1.1) *и система координат* (1.1.1)–(1.1.2).

1. *Если функция* $u(x),\ x\in G,$ *– решение уравнения* (1.1)*, то её образ* $\tilde{u}(\xi),\ \xi\in\tilde{G},$ *– решение уравнения*

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(\xi)\ \tilde{u}_{\xi_i\xi_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n}\beta_i(\xi)\ \tilde{u}_{\xi_i}+\tilde{c}(\xi)\ \tilde{u}=\tilde{F}(\xi),\quad \xi\in\tilde{G},\quad (1.1.3)$$

где

$$\alpha_{ij}(\xi):=\sum\nolimits_{k,l=1}^{n}a_{kl}(x)\cdot(\Phi_i)_{x_k}(x)\cdot\left(\Phi_j\right)_{x_l}(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\xi)},\qquad (1.1.4)$$

$$\beta_i(\xi) := \sum\nolimits_{k=1}^{n} b_k(x)\cdot(\Phi_i)_{x_k}(x) +$$

$$+\sum\nolimits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)\cdot(\Phi_i)_{x_k x_l}(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\xi)}. \quad (1.1.5)$$

2. *Если у функции* $u(x),\ x\in G,$ *образ* $\tilde{u}(\xi),\ \xi\in\tilde{G},$ *– решение уравнения* (1.1.3)*, то функция* $u(x),\ x\in G,$ *– решение уравнения* (1.1).

□ Доказываем 1. По замечанию 1.1.2 образ $\tilde{u}(\xi)\in C^2(\tilde{G}).$ Пусть точка $x\in G.$ Тогда для любых индексов $i,j\in\overline{1,n}$ имеем

$$u(x)=\tilde{u}(\Phi(x)),$$

$$u_{x_i}(x)=\left(\tilde{u}(\Phi(x))\right)_{x_i}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{u}_{\xi_k}(\Phi(x))\cdot(\Phi_k)_{x_i}(x),$$

$$u_{x_i x_j}(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{u}_{\xi_k}(\Phi(x))\cdot(\Phi_k)_{x_i}(x)\right)_{x_j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sum_{l=1}^{n}\tilde{u}_{\xi_k\xi_l}(\Phi(x))\cdot(\Phi_l)_{x_j}(x)\right)\cdot(\Phi_k)_{x_i}(x)+\tilde{u}_{\xi_k}(\Phi(x))\cdot(\Phi_k)_{x_i x_j}(x)\right).$$

Подставляем полученные выражения для $u(x)$, $u_{x_i}(x)$ и $u_{x_i x_j}(x)$ в равенство (1.1); переставляем порядок суммирования по i, j и k, l; собираем коэффициенты при $\tilde{u}_{\xi_k\xi_l}(\Phi(x))$ и $\tilde{u}_{\xi_k}(\Phi(x)),$ имеем

$$\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{u}_{\xi_k\xi_l}(\Phi(x))\cdot\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cdot(\Phi_l)_{x_j}(x)\cdot(\Phi_k)_{x_i}(x)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\tilde{u}_{\xi_k}(\Phi(x))\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\cdot(\Phi_k)_{x_i}(x)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cdot(\Phi_k)_{x_i x_j}(x)\right]+$$

$$+\tilde{c}(\Phi(x))\cdot\tilde{u}(\Phi(x))=\tilde{F}(\Phi(x)). \quad (1.1.6)$$

В итоге для любой точки $x\in G$ имеем: 1) числовое равенство в (1.1) верно, если и только если верно числовое равенство в (1.1.6) и 2) для точки $\xi=\Phi(x)$ верно числовое равенство в (1.1.3).

Так как для любой точки $\xi\in\tilde{G}$ существует точка $x\in G$ такая, что $\xi=\Phi(x)$, то числовое равенство в (1.1.3) верно для любой точки $\xi\in\tilde{G}.$

Доказываем 2. По замечанию 1.1.2 функция $u(x) \in C^2(G)$. Так как $\forall\ x \in G$ точка $\xi = \Phi(x) \in \tilde{G}$ и в ней по посылке верно равенство в (1.1.3), то в точке x верны равенство в (1.1.6) и равенство в (1.1). ■

Замечание 1.1.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1. Тогда для любой точки $x \in G$ и точки $\xi = \Phi(x)$ матрицы старших коэффициентов $A := \left\| a_{ij}(x) \right\|$ и $\tilde{A} := \left\| \alpha_{ij}(\xi) \right\|$ в координатах x и ξ, соответственно, связаны равенством

$$\tilde{A} = \Phi_x\ A\ (\Phi_x)^T, \tag{1.1.7}$$

где $\Phi_x := \left\| (\Phi_i)_{x_j}(x) \right\|_{i,j\in\overline{1,n}}$ – матрица Якоби.

Упражнение 1.1.1. Доказать, что образ оператора Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy}, \quad u(x,y) \in C^2\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \ge 0\}\right),$$

в полярной системе координат, задаваемой неявно соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \in (0;+\infty), \quad \varphi \in (0;2\pi), \tag{1.1.8}$$

может быть записан в виде

$$\frac{1}{r}(r\tilde{u}_r)_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi}, \quad \tilde{u}(r,\varphi) \in C^2\big((0;+\infty)\times(0;2\pi)\big). \tag{1.1.9}$$

Упражнение 1.1.2. Доказать, что образ оператора Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad u(x,y,z) \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) |\ x \ge 0 \wedge y = 0 \wedge z \in \mathbb{R}\}\right),$$

в сферической системе координат, задаваемой неявно соотношениями

$$x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{1.1.10}$$

$$r \in (0;+\infty), \quad \theta \in (0;\pi), \quad \varphi \in (0;2\pi),$$

может быть записан в виде:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\tilde{u}_r\right)_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\cdot\tilde{u}_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\tilde{u}_{\varphi\varphi}\right),$$

$$\tilde{u}(r,\theta,\varphi) \in C^2\big((0;+\infty)\times(0;\pi)\times(0;2\pi)\big).$$

1.2. Приведение к диагональному виду в точке в $\mathbb{R}^n$

Определение 1.2.1. Дифференциальное уравнение (1.1) *имеет диагональный (канонический) вид в точке* $x \in G$, если и только если матрица

$\left\|a_{ij}\left(x\right)\right\|$ его старших коэффициентов в точке x имеет диагональный (канонический) вид.

Рассматриваются дифференциальные уравнения (1.1) с *симметрическими* матрицами старших коэффициентов, т.е.

$$a_{ij}\left(x\right)=a_{ji}\left(x\right)\ \ \forall\ i,j\in\overline{1,n}\ \ \forall\ \ x\in G. \qquad (1.2.1)$$

При приведении к диагональному виду дифференциального уравнения (1.1), имеющего в точке $x\in G$ симметрическую матрицу старших коэффициентов $\left\|a_{ij}(x)\right\|$ возникают алгебраическое уравнение

$$\det\left\|a_{ij}\left(x\right)-\lambda\delta_{ij}\right\|_{i,j\in\overline{1,n}}=0 \qquad (1.2.2)$$

и суммы $n_+\left(x\right)$ и $n_-\left(x\right)$ кратностей положительных и отрицательных корней уравнения (1.2.2), все корни которого действительны.

Теорема 1.2.1 (об инвариантности при приведении к диагональному виду)**.** *Пусть задано дифференциальное уравнение* (1.1)*; в точке* $\dot{x}\in G$ *матрица* $\left\|a_{ij}\left(\dot{x}\right)\right\|$ *старших коэффициентов симметрическая.*

Если система координат (1.1.1)–(1.1.2) *такая, что в точке* $\dot{\xi}=\Phi\left(\dot{x}\right)$ *матрица* $\left\|\alpha_{ij}\left(\dot{\xi}\right)\right\|$ *старших коэффициентов образа* (1.1.3) *дифференциального уравнения* (1.1) *является диагональной, то количества* N_+ и N_- *положительных и отрицательных элементов матрицы* $\left\|\alpha_{ij}\left(\dot{\xi}\right)\right\|$ *такие, что* $N_+=n_+\left(\dot{x}\right)$ и $N_-=n_-\left(\dot{x}\right)$, *где* $n_+(\dot{x})$ *и* $n_-(\dot{x})$ *– суммы кратностей положительных и отрицательных корней уравнения* (1.2.2) *в точке* $\dot{x}$, *соответственно.*

□ Шаг 1. Для любой невырожденной матрицы $S=\left\|s_{ij}\right\|_{i,j\in\overline{1,n}}$ в системе координат $\xi=xS,\ \ x\in G,$ где $xS:=\left(\sum_{m=1}^{n}x_m s_{m1},\dots,\sum_{m=1}^{n}x_m s_{mn}\right),$ для точки $\dot{\xi}=\dot{x}S$ по формуле (1.1.4) имеем

$$\left\|\hat{\alpha}_{ij}\left(\dot{\xi}\right)\right\|=\left\|\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}\left(x\right)\left(\sum_{m=1}^{n}x_m s_{mi}\right)_{x_k}\left(\sum_{m=1}^{n}x_m s_{mj}\right)_{x_l}\Big|_{x=\dot{x}}\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}\left(\dot{x}\right)s_{ki}s_{lj}\right\|=S^TAS,\quad \text{где}\ \ A:=\left\|a_{kl}\left(\dot{x}\right)\right\|. \qquad (1.2.3)$$

Так как матрица A симметрическая, то существует ортогональная матрица S такая, что матрица S^TAS диагональная.

Шаг 2. Так как матрица $S^T AS$ диагональная, то количества положительных и отрицательных элементов $\hat{N}_+$ и $\hat{N}_-$ матрицы $S^T AS$ соответственно равны суммам кратностей положительных и отрицательных корней уравнения $\det\left(S^T AS-\lambda E\right)=0,$ которое совпадает с уравнением (1.2.2), так как $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ ↳

$$\left|S^T AS-\lambda E\right|=\left|S^T AS-S^T\left(\lambda E\right)S\right|=\left|S^T\right|\left|A-\lambda E\right|\left|S\right|=\left|A-\lambda E\right|.$$

Доказано, что $\hat{N}_+=n_+(\dot{x})$ и $\hat{N}_-=n_-(\dot{x}).$

Шаг 3. Так как в системе координат (1.1.1)–(1.1.2) для точки $\dot{\xi}=\Phi\left(\dot{x}\right)$ верно равенство (1.1.7), где матрица A симметрическая, матрица $\left(\Phi_x\right)^T$ невырожденная, матрица $\left\|\alpha_{ij}\left(\dot{\xi}\right)\right\|$ диагональная, то $N_+=\hat{N}_+$ и $N_-=\hat{N}_-.$

■

Пример 1.2.1 (приведения к диагональному (каноническому) виду в точке)**.** Для приведения дифференциального уравнения (1.1) к диагональному (каноническому) виду в точке $\dot{x}\in G$, где матрица старших коэффициентов $A=\left\|a_{ij}\left(\dot{x}\right)\right\|$ является симметрической, следует: 1) привести матрицу A к диагональному (каноническому) виду $A'=\left(S_k^T\ldots\left(S_1^T AS_1\right)\ldots S_k\right)$ элементарными преобразованиями с матрицами S_κ^T и S_κ, где $\kappa\in\overline{1,k};$ 2) вычислить матрицу $S=S_1\ldots S_k$ и сделать вывод, что в системе координат $\xi=xS,\ x\in G,$ для точки $\dot{\xi}=\dot{x}S$ матрица старших коэффициентов $\left\|\alpha_{ij}\left(\dot{\xi}\right)\right\|=A';$ 3) вычислить коэффициенты $\alpha_{ij}\left(\xi\right)$ и $\beta_i\left(\xi\right)$ по формулам (1.1.4)–(1.1.5) и образы $\tilde{c}\left(\xi\right)$ и $\tilde{F}\left(\xi\right)$ по определению 1.1.1; 4) составить образ (1.1.3) уравнения (1.1) в системе координат $\xi=xS,\ x\in G.$

Определение 1.2.2. Дифференциальное уравнение (1.1), имеющее в точке $x\in G$ симметрическую матрицу старших коэффициентов $\left\|a_{ij}(x)\right\|$, называется: 1) *эллиптическим,* 2) *гиперболическим,* 3) *ультрагиперболическим,* 4) *параболическим в точке* $x,$ если и только если суммы $n_+\left(x\right)$ и $n_-\left(x\right)$ кратностей положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения (1.2.2) соответственно такие, что:

1) $n_+\left(x\right)+n_-\left(x\right)=n\ \wedge\ n_+\left(x\right)\in\left\{0,n\right\},$

2) $n_+(x)+n_-(x)=n \;\wedge\; n_+(x)\in\{1,n-1\}$,

3) $n_+(x)+n_-(x)=n \;\wedge\; n_+(x)\in\overline{2,n-2}$,

4) $n_+(x)+n_-(x)<n$.

В настоящем пособии ультрагиперболические уравнения и параболические уравнения с $n_+(x)+n_-(x)\le n-2$ не изучаются.

Упражнение 1.2.1. Определить тип дифференциального уравнения в каждой точке области его определения: 1) $u_{xx}+u_{yy}=0,\;\; (x,y)\in\mathbb{R}^2$; 2) $u_{tt}=u_{xx},\;\; x\in\mathbb{R},\; t\in\mathbb{R}_+$; 3) $u_t=u_{xx}+u_{yy},\; (x,y)\in\mathbb{R}^2,\; t\in\mathbb{R}_+$; 4) $yu_{xx}+u_{yy}=0,\;\; (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Ответ: 1) эллиптический при $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; 2) гиперболический при $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$; 3) параболический при $(x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge t\in\mathbb{R}_+$; 4) эллиптический при $x\in\mathbb{R}\wedge y>0$, гиперболический при $x\in\mathbb{R}\wedge y<0$, параболический при $x\in\mathbb{R}\wedge y=0$.

1.3. О примере Адамара

Рассматривается задача поиска всех функций $u(x,y)\in C^2(G)$ таких, что в каждой точке $(x,y)\in G$ верно равенство

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0, \tag{1.3.1}$$

и для любого числа $x\in(\alpha;\beta)$ верны равенства

$$u(x,0)=0, \qquad u_y(x,0)=u_1(x), \tag{1.3.2}$$

где G – область в $\mathbb{R}^2$, интервал $(\alpha;\beta)\subset\mathbb{R}$, пространственный интервал $\{(x,0)|\;\, x\in(\alpha;\beta)\}\subset G$; функция $u_1(x),\;\; x\in(\alpha;\beta)$, задана; функция $u:=u(x,y),\;\; (x,y)\in G$, искомая, т.е. решение.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что решение $\hat{u}(x,y),\;\; (x,y)\in G$, задачи (1.3.1)–(1.3.2) , соответствующее заданной функции $\hat{u}_1(x)$ в условии (1.3.2), *непрерывно зависит в точке* $(\dot{x},\dot{y})\in G$ *от задаваемой функции* $u_1(x)$ *в условии* (1.3.2), если и только если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для любых задаваемой функции $u_1(x)$,

$x\in(\alpha;\beta)$, удовлетворяющей неравенству $\sup\limits_{x\in(\alpha;\beta)}\left|u_1(x)-\hat{u}_1(x)\right|<\delta$, и решения $u(x,y)$ уравнения (1.3.1), удовлетворяющего условию (1.3.2), верно неравенство $\left|u(\dot{x},\dot{y})-\hat{u}(\dot{x},\dot{y})\right|<\varepsilon$.

Теорема 1.3.1 (об отсутствии непрерывной зависимости решения от задаваемой функции)**.** *Пусть функция* $\hat{u}(x,y)$, $(x,y)\in G$, *– решение задачи* (1.3.1)–(1.3.2) *с заданной функцией* $\hat{u}_1(x)$ *в условии* (1.3.2)*. Тогда в любой точке* $(\dot{x},\dot{y})\in G$, *у которой* $\dot{y}\neq 0$, *решение* $\hat{u}(x,y)$ *не является непрерывно зависимым от задаваемой функции* $u_1(x)$ *в условии* (1.3.2).

□ Существует число $\varepsilon=1>0$ такое, что для любого числа $\delta>0$ существуют:

1) задаваемая функция

$$u_1(x)=\hat{u}_1(x)+k^{-1}\sin k\left(x-\dot{x}+\frac{\pi}{2}\right),\quad x\in(\alpha;\beta),$$

где число $k\in\mathbb{N}$ нечётное и такое, что $\left|k^{-1}\right|<\delta$ и $\left|k^{-2}\operatorname{sh}k\dot{y}\right|\geq\varepsilon$,

2) соответствующее ей решение

$$u(x,y)=\hat{u}(x,y)+k^{-2}\operatorname{sh}ky\cdot\sin k(x-\dot{x}+\pi/2),\quad (x,y)\in G,$$

такие, что

$$\sup_{x\in(\alpha;\beta)}\left|u_1(x)-\hat{u}_1(x)\right|<\delta\ \wedge\ \left|u(\dot{x},\dot{y})-\hat{u}(\dot{x},\dot{y})\right|\geq\varepsilon. \qquad ■$$

Примером Адамара называют (см. [2]) пример существования:

1) задачи Коши

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_y(x,0)=0,\qquad x\in\mathbb{R},$$

с решением $u(x,y)=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, и

2) последовательности задач Коши

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_y(x,0)=k^{-1}\sin kx,\qquad x\in\mathbb{R},$$

с решениями $u_k(x,y)=k^{-2}\operatorname{sh}ky\cdot\sin kx$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, где $k\in\mathbb{N}$.

Замечание 1.3.1 (о примере Адамара *некорректной задачи*)**.** Пример Адамара доказывает, что нулевое решение задачи Коши (1.3.1)–(1.3.2) с

$G=\mathbb{R}^2$ и $(\alpha;\beta)=\mathbb{R}$ в любой точке $(\dot{x},\dot{y})\in\mathbb{R}^2$, у которой $\dot{y}\neq 0$ и $\sin\dot{x}\neq 0$, не является непрерывно зависимым в смысле определения 1.3.1 от задаваемой функции $u_1(x)$ в условии (1.3.2), так как при $k\to\infty$ последовательности $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|k^{-1}\sin kx\right|\to 0$, $\left|k^{-2}\operatorname{sh}k\dot{y}\right|\to\infty$ и $\sin k\dot{x}\not\to 0$.

2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В $\mathbb{R}^2$

В $\mathbb{R}^2$ используются координаты (x,y) и изучается уравнение

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+b_1(x,y)u_x+b_2(x,y)u_y+$$
$$+d(x,y)u=F(x,y),\quad (x,y)\in G, \qquad (2.1)$$

где G – область в $\mathbb{R}^2$, все коэффициенты и свободный член $F(x,y)$ из функционального множества $C(G)$, причём в каждой точке $(x,y)\in G$ верно неравенство $|a(x,y)|+|b(x,y)|+|c(x,y)|\neq 0.$

Определение 2.1. *Решение уравнения* (2.1) *на области* $\Omega\subset G$ – это функция $u:=u(x,y)\in C^2(\Omega)$ такая, что для любой точки $(x,y)\in\Omega$ верно числовое равенство в (2.1).

Определение 2.2. Дифференциальное уравнение (2.1) называется*:*
1) *эллиптическим,* 2) *гиперболическим,* 3) *параболическим в точке* $(x,y)\in G,$ если и только если верно соотношение, соответственно,:

1) $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0,$ 2) $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0,$

3) $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0.$

2.1. Приведение к каноническому виду в области

Определение 2.1.1. *Характеристика* дифференциального уравнения (2.1) – это гладкая кривая $\Gamma,$ для которой существует решение $\omega(x,y)$ *характеристического уравнения*

$$a(x,y)\omega_x{}^2+2b(x,y)\omega_x\omega_y+c(x,y)\omega_y{}^2=0,\quad (x,y)\in G, \qquad (2.1.1)$$

такое, что $\Gamma\subset\{(x,y)\in G|\ \ \omega(x,y)=0\ \wedge\ \overline{\nabla}\omega(x,y)\neq\overline{0}\}.$

Определение 2.1.2. *Уравнение характеристик* дифференциального уравнения (2.1) – это квадратное уравнение в дифференциалах первого порядка

$$a(x,y)dy^2-2b(x,y)dydx+c(x,y)dx^2=0,\quad (x,y)\in G. \qquad (2.1.2)$$

Теорема 2.1.1 (о приведении к каноническому виду в некоторой окрестности для гиперболического уравнения)**.** *Пусть в уравнении* (2.1) *коэффициенты* $a(x,y),b(x,y),c(x,y)\in C^2(G)$ *и в каждой точке* $(x,y)\in G$ *верны неравенства* $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$ *и* $a(x,y)>0.$

Тогда для любой точки $(\dot{x},\dot{y})\in G$ *существуют область* $\Omega\subset G$, *содержащая точку* $(\dot{x},\dot{y})$, *и функции* $\varphi(x,y),\psi(x,y)\in C^2(\Omega)$ *такие, что:*
1) *отображение* $(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ *взаимно однозначно,* 2) *в каждой точке* $(x,y)\in\Omega$ *якобиан* $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}(x,y)\neq 0$ *и* 3) *в системе координат* $(\xi,\eta)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ *уравнение* (2.1) *имеет вид*

$$2\alpha_{12}\tilde{u}_{\xi\eta}+\beta_1\tilde{u}_{\xi}+\beta_2\tilde{u}_{\eta}+\tilde{d}\tilde{u}=\tilde{F},\qquad (\xi,\eta)\in\tilde{\Omega},$$

где $\tilde{\Omega}$ *– образ* Ω *в координатах* (ξ,η), *функции* α_{12}, β_1, β_2, $\tilde{d}$ *и* $\tilde{F}$ *переменных* (ξ,η) *из теоремы* 1.1.1 *и* $\alpha_{12}(\xi,\eta)\neq 0\ \ \forall\ (\xi,\eta)\in\tilde{\Omega}$.

□ Характеристическое уравнение (2.1.1) равносильно уравнению

$$\Big(\omega_x+\lambda_1(x,y)\omega_y\Big)\Big(\omega_x+\lambda_2(x,y)\omega_y\Big)=0,\qquad (x,y)\in G, \tag{2.1.3}$$

где $\forall\ i\in\overline{1,2}$ ↳

$$\lambda_i(x,y)=\frac{b(x,y)-(-1)^i\sqrt{b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)}}{a(x,y)},\quad (x,y)\in G. \tag{2.1.4}$$

<u>Шаг 1</u>. Пусть $i=1.$ Тогда существуют область $Q\subset G$ и функция $\varphi(x,y)\subset C^2(Q)$ такие, что: 1) $(\dot{x},\dot{y})\in Q,$ 2) $\varphi_y(\dot{x},\dot{y})=1$ и 3) $\forall\ (x,y)\in Q$ верно равенство

$$\varphi_x(x,y)+\lambda(x,y)\varphi_y(x,y)=0. \tag{2.1.5}$$

Действительно, пусть по обозначению $\lambda(x,y):=\lambda_1(x,y).$ Так как функция $\lambda(x,y)\in C^1(G)$, то существуют интервалы $\Delta_y:=(\dot{y}-r;\dot{y}+r)$, $\Delta_x:=(\dot{x}-\delta;\dot{x}+\delta)$ и существует функция $Y(x,y_0)\in C\Big(\Delta_x\times\Delta_y\Big)$ такая, что $\forall\ y_0\in\Delta_y$: 1) функция $Y(x,y_0)\in C^1(\Delta_x)$, удовлетворяет функциональному равенству

$$Y_x(x,y_0)=\lambda\Big(x,Y(x,y_0)\Big),\qquad x\in\Delta_x, \tag{2.1.6}$$

и условию Коши

$$Y(\dot{x},y_0)=y_0; \tag{2.1.7}$$

2) производная $Y_{y_0}(x,y_0)\in C\Big(\Delta_x\times\Delta_y\Big)$ и $\forall\ y_0\in\Delta_y$ производная $Y_{y_0}(x,y_0)$, $x\in\Delta_x$, удовлетворяет функциональному равенству

$$Y_{y_0x}(x,y_0)=\lambda_y\Big(x,Y(x,y_0)\Big)\cdot Y_{y_0}(x,y_0),\qquad x\in\Delta_x,$$

и условию Коши $Y_{y_0}(\dot{x}, y_0) = 1.$ Следовательно, $\forall\ (x, y_0) \in \Delta_x \times \Delta_y$ верно равенство

$$Y_{y_0}(x, y_0) = e^{\int_{\dot{x}}^{x} \lambda_y(\zeta, Y(\zeta, y_0))d\zeta}. \qquad (2.1.8)$$

Из равенства (2.1.6) видно, что: производная $Y_x \in C(\Delta_x \times \Delta_y),$ так как $\lambda(x, y) \in C(G);$ $Y_{xx} \in C(\Delta_x \times \Delta_y)$ и $Y_{xy_0} \in C(\Delta_x \times \Delta_y),$ так как $\lambda(x, y) \in C^1(G).$

Из равенства (2.1.8) видно, что: производная $Y_{y_0 x} \in C(\Delta_x \times \Delta_y),$ так как $\lambda(x, y) \in C^1(G);$ производная $Y_{y_0 y_0} \in C(\Delta_x \times \Delta_y),$ так как $\lambda(x, y) \in C^2(G).$

Таким образом доказано, что у отображения

$$(x, y) = (x, Y(x, y_0)), \quad (x, y_0) \in \Delta_x \times \Delta_y, \qquad (2.1.9)$$

функция $Y(x, y_0) \in C^2(\Delta_x \times \Delta_y),$ причём в точке $(\dot{x}, \dot{y})$ его якобиан (пояснения ниже)

$$\begin{vmatrix} x_x & x_{y_0} \\ Y_x & Y_{y_0} \end{vmatrix}(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda(\dot{x}, \dot{y}) & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Первое равенство следует из равенств (2.1.6), (2.1.7) и (2.1.8).

По теореме о локальной обратимости отображения существуют область P точек $(x, y_0),$ содержащая точку $(\dot{x}, \dot{y}),$ и область Q точек $(x, y),$ содержащая точку $(\dot{x}, \dot{y}),$ такие, что отображение (2.1.9) взаимно однозначно отображает P на $Q,$ причём: 1) у обратного отображения $(x, y_0) = (x, \varphi(x, y)),$ $(x, y) \in Q,$ функция $\varphi(x, y) \in C^2(Q),$ 2) для любой точки $(x, y_0) \in P$ верно равенство

$$\varphi(x, Y(x, y_0)) = y_0. \qquad (2.1.10)$$

Вычисляя производную от (2.1.10) по x в точке $(x, y_0) \in P,$ имеем

$$\varphi_x(x, Y(x, y_0)) + \varphi_y(x, Y(x, y_0)) Y_x(x, y_0) = 0.$$

Применив (2.1.6), имеем

$$\varphi_x(x, Y(x, y_0)) + \varphi_y(x, Y(x, y_0)) \lambda(x, Y(x, y_0)) = 0.$$

Так как точки $(x, Y(x, y_0))$ пробегают всё $Q,$ то (2.1.5) доказано.

Вычисляя производную от (2.1.10) по y_0 в точке $(x, y_0) \in P,$ имеем

$$\varphi_x\left(x, Y\left(x, y_0\right)\right) x_{y_0} + \varphi_y\left(x, Y\left(x, y_0\right)\right) Y_{y_0}\left(x, y_0\right) = 1.$$

Так как $x_{y_0} = 0,$ $Y(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{y}$ и $Y_{y_0}(\dot{x}, \dot{y}) = 1,$ то $\varphi_y(\dot{x}, \dot{y}) = 1.$

<u>Шаг 2</u>. Пусть $i = 2.$ Тогда, применив рассуждения шага 1 для функций $\psi(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ (вместо $\varphi(x, y)$ и $\lambda_1(x, y)$), получим, что существуют область $R \subset G$ и функция $\psi(x, y) \subset C^2(R)$ такие, что:

1) $(\dot{x}, \dot{y}) \in R,$ 2) $\psi_y(\dot{x}, \dot{y}) = 1$ и 3) $\forall$ $(x, y) \in R$ верно равенство

$$\psi_x(x, y) + \lambda_2(x, y) \psi_y(x, y) = 0. \tag{2.1.11}$$

<u>Шаг 3</u>. Возникает отображение

$$(\xi, \eta) = (\varphi(x, y), \psi(x, y)), \quad (x, y) \in Q \cap R. \tag{2.1.12}$$

Используя (2.1.5), (2.1.12) и условие гиперболичности, имеем

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} (\dot{x}, \dot{y}) = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & 1 \end{vmatrix} (\dot{x}, \dot{y}) \varphi_y(\dot{x}, \dot{y}) \psi_y(\dot{x}, \dot{y}) \neq 0.$$

Поэтому существует область $\Omega \subset Q \cap R,$ содержащая точку $(\dot{x}, \dot{y}),$ на которой отображение (2.1.12) взаимно однозначно, дважды непрерывно дифференцируемое и невырожденное, причём $\forall$ $(x, y) \in \Omega \hookrightarrow$ $\varphi_y(x, y) \neq 0 \wedge \psi_y(x, y) \neq 0.$

<u>Шаг 4</u>. Для любой точки $(\xi, \eta) \in \tilde{\Omega},$ используя формулу (1.1.7) и опуская аргументы, имеем

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a\varphi_x + b\varphi_y & a\psi_x + b\psi_y \\ b\varphi_x + c\varphi_y & b\psi_x + c\psi_y \end{Vmatrix}. \tag{2.1.13}$$

Следовательно, используя (2.1.5), (2.1.11) и (2.1.4), имеем

$$\alpha_{11} = \varphi_x\left(a\varphi_x + b\varphi_y\right) + \varphi_y\left(b\varphi_x + c\varphi_y\right) = \varphi_y \varphi_y\left(a\lambda_1^2 - 2b\lambda_1 + c\right) = 0;$$

$$\alpha_{22} = \psi_x\left(a\psi_x + b\psi_y\right) + \psi_y\left(b\psi_x + c\psi_y\right) = \psi_y \psi_y\left(a\lambda_2^2 - 2b\lambda_2 + c\right) = 0;$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \varphi_x\left(a\psi_x + b\psi_y\right) + \varphi_y\left(b\psi_x + c\psi_y\right) =$$

$$= \varphi_y \psi_y\left(a\lambda_1\lambda_2 - b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\right) = \varphi_y \psi_y\left(c - b\frac{2b}{a} + c\right) \neq 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 2.1.2 (о приведении к каноническому виду в некоторой окрестности для параболического уравнения)**.** *Пусть в уравнении* (2.1) *коэффициенты* $a(x,y), b(x,y), c(x,y) \in C^2(G)$ *и в каждой точке* $(x,y) \in G$ *верны соотношения* $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$ *и* $a(x,y) > 0.$ *Тогда для любой точки* $(\dot{x},\dot{y}) \in G$ *существуют область* $\Omega,$ *принадлежащая* G *и содержащая точку* $(\dot{x},\dot{y}),$ *и функция* $\varphi(x,y) \in C^2(\Omega)$ *такие, что:* 1) *отображение* $(\varphi(x,y), x),$ $(x,y) \in \Omega,$ *взаимно однозначно,* 2) *в каждой точке* $(x,y) \in \Omega$ *якобиан* $\dfrac{\partial(\varphi,x)}{\partial(x,y)}(x,y) \neq 0$ *и* 3) *в системе координат* $(\xi,\eta) = (\varphi(x,y), x),$ $(x,y) \in \Omega,$ *уравнение* (2.1) *имеет вид*

$$\alpha_{22}\tilde{u}_{\eta\eta} + \beta_1\tilde{u}_\xi + \beta_2\tilde{u}_\eta + \tilde{d}\tilde{u} = \tilde{F}, \qquad (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega},$$

где $\tilde{\Omega}$ *– образ* Ω *в координатах* (ξ,η), *функции* α_{22}, β_1, β_2, $\tilde{d}$ *и* $\tilde{F}$ *переменных* (ξ,η) *из теоремы* 1.1.1 *и* $\alpha_{22}(\xi,\eta) \neq 0 \quad \forall \ (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}.$

□ Рассмотрим отображение

$$(\xi,\eta) = (\varphi(x,y), x), \ (x,y) \in Q, \qquad (2.1.14)$$

где функция $\varphi(x,y) \in C^2(Q)$ из теоремы 2.1.1.

Так как якобиан

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ x_x & x_y \end{vmatrix}(\dot{x},\dot{y}) = -\varphi_y(\dot{x},\dot{y}) = -1,$$

то существует область $\Omega \subset Q,$ содержащую точку $(\dot{x},\dot{y}),$ на которой отображение (2.1.14) взаимно однозначно, дважды непрерывно дифференцируемое и невырожденное, причём $\varphi_y(x,y) \neq 0 \ \ \forall \ (x,y) \in \Omega.$

Для любой точки $(\xi,\eta) \in \tilde{\Omega},$ используя формулу (1.1.7) и опуская аргументы $(\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}$ и соответствующие им $(x,y) \in \Omega,$ имеем

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varphi_x & 1 \\ \varphi_y & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a\varphi_x + b\varphi_y & a \\ b\varphi_x + c\varphi_y & b \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, используя (2.1.5) и (2.1.4), имеем

$$\alpha_{11} = \varphi_x\left(a\varphi_x + b\varphi_y\right) + \varphi_y\left(b\varphi_x + c\varphi_y\right) = \varphi_y\varphi_y\left(a\lambda_1^2 - 2b\lambda_1 + c\right) = 0,$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = a\varphi_x + b\varphi_y = \varphi_y\left(-a\lambda_1 + b\right) = 0, \ \ \alpha_{22} = a \neq 0. \quad \blacksquare$$

2.2. Задача Коши

Рассматриваются дифференциальное уравнение (2.1) и условие Коши

$$u(x,y)=u_0(x,y),\quad u_y(x,y)=u_1(x,y),\qquad (x,y)\in\Gamma, \tag{2.2.1}$$

где пространственный интервал $\Gamma=((a_1,a_2);(b_1,b_2))\subset G,$ причём $a_1\neq b_1.$

Определение 2.2.1. *Решение задачи Коши* (2.1), (2.2.1) *на области* $\Omega\subset G$ – это функция $u:=u(x,y)\in C^2(\Omega)$ такая, что: 1) в каждой точке $(x,y)\in\Omega$ верно числовое равенство в (2.1); 2) для любой точки $(x,y)\in\Gamma$ верны числовые равенства в (2.2.1).

Предполагается, что для уравнения (2.1) задана система координат

$$(\xi,\eta)=(\varphi(x,y),\psi(x,y)),\ (x,y)\in G, \tag{2.2.2}$$

у которой отображение $(\varphi(x,y),\psi(x,y)),\ (x,y)\in G,$ взаимно однозначно, дважды непрерывно дифференцируемое и невырожденное.

Определение 2.2.2. Область $\Omega\subset G$ называется *элементарной относительно системы координат* (2.2.2), если и только если в системе координат (2.2.2) образ $\tilde{\Omega}$ такой, что для любой точки $(\dot{\xi};\dot{\eta})\in\tilde{\Omega}$ проекции $\left\{\eta\,\middle|\,(\dot{\xi},\eta)\in\tilde{\Omega}\right\}$ и $\left\{\xi\,\middle|\,(\xi,\dot{\eta})\in\tilde{\Omega}\right\}$ являются интервалами.

Для *уравнения малых колебаний струны*

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2,$$

уравнение характеристик (2.1.2) имеет вид

$$dx^2-a^2dt^2=0,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2,$$

правая часть которого представляется в виде произведения линейных сомножителей

$$(dx-adt)(dx+adt)=0,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Общие решения линейных уравнений в дифференциалах $dx-adt=0$ и $dx+adt=0,$ имеют вид $x-at=C_1,$ $C_1\in\mathbb{R},$ и $x+at=C_2,$ $C_2\in\mathbb{R},$ соответственно.

Вводим систему координат

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{2.2.3}$$

в которой отображение $(x-at,x+at),\ (x,t)\in\mathbb{R}^2,$ является взаимно однозначным, дважды непрерывно дифференцируемым и невырожденным.

Пример 2.2.1 (решения задачи Коши для гиперболического уравнения на элементарной области)**.** Найти все решения задачи Коши на области Ω

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad (2.2.4)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in (\alpha;\beta), \qquad (2.2.5)$$

где коэффициент $a > 0,$ область $\Omega:$ 1) элементарная относительно системы координат (2.2.3), 2) принадлежит характеристическому четырёхугольнику задачи Коши $Q := \{(x,t) \mid \alpha < x - at < \beta \wedge \alpha < x + at < \beta\},$

3) имеет границу $\partial\Omega,$ содержащую точки $(\alpha,0)$ и $(\beta,0).$

□ Этап 1. Ищем необходимые условия. Пусть существует решение $u := u(x,t),$ $(x,t) \in \Omega;$ тогда функция $u(x,t) \in C^2(\Omega)$ по определению 2.2.1 и её образ $\tilde{u}(\xi,\eta) \in C^2(\tilde{\Omega})$ по замечанию 1.1.2 (о преобразовании функций при замене системы координат).

Шаг 1. Ищем уравнение для образа $\tilde{u}(\xi,\eta)$ в системе координат (2.2.3). Для функции $u = u(x,t),$ $(x,t) \in \Omega,$ её образа $\tilde{u} = \tilde{u}(\xi,\eta),$ $(\xi,\eta) \in \tilde{\Omega},$ любой точки $(x,t) \in \Omega$ и её образа $(\xi,\eta) \in \tilde{\Omega},$ опуская аргументы и применяя формулы $u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x$ и $u_t = \tilde{u}_\xi \xi_t + \tilde{u}_\eta \eta_t,$ имеем:

$$u_x = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta,$$

$$u_t = \tilde{u}_\xi(-a) + \tilde{u}_\eta a,$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta}, \qquad \Big| \cdot\left(-a^2\right)$$

$$u_{tt} = \tilde{u}_{\xi\xi} a^2 + \tilde{u}_{\xi\eta}\left(-a^2\right) + \tilde{u}_{\eta\xi}\left(-a^2\right) + \tilde{u}_{\eta\eta} a^2. \qquad \Big| \cdot 1$$

Подставляем полученные формулы в (2.2.4) и приводим подобные слагаемые, т.е. умножаем полученные равенства на указанные множители, суммируем их и собираем коэффициенты около производных функции $\tilde{u}(\xi,\eta),$ используя равенство $\tilde{u}_{\xi\eta} = \tilde{u}_{\eta\xi}.$ Имеем

$$0 = \tilde{u}_{\xi\xi}\left(-a^2 + a^2\right) + \tilde{u}_{\xi\eta}\left(-a^2 - a^2 - a^2 - a^2\right) + \tilde{u}_{\eta\eta}\left(-a^2 + a^2\right);$$

откуда

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = 0, \qquad (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}. \qquad (2.2.6)$$

Шаг 2. Ищем образ $\tilde{u}(\xi,\eta).$

1. Для любой координаты $\xi \in (\alpha;\beta)$ из обыкновенного дифференциального уравнения $\left(\tilde{u}_\xi\right)_\eta = 0,\quad \eta \in \left\{\eta \middle| (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}\right\},$ ищем $\tilde{u}_\xi(\xi,\eta);$ получаем, что существует и является единственным число $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}$ такое, что для любой координаты $\eta \in \left\{\eta \middle| (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}\right\}$ функция $\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) = \varphi(\xi).$ Так как $\tilde{u}(\xi,\eta) \in C^2\left(\tilde{\Omega}\right),$ то $\varphi(\xi) \in C^1\left(\tilde{\Omega}\right);$ поэтому $\varphi(\xi) \in C^1(\alpha;\beta).$

2. Пусть $\Phi(\xi)$ – первообразная $\varphi(\xi).$ Для любой координаты $\eta \in (\alpha;\beta)$ из обыкновенного дифференциального уравнения $\tilde{u}_\xi = \varphi(\xi),$ $\xi \in \left\{\xi \middle| (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}\right\},$ ищем $\tilde{u}(\xi,\eta);$ получаем, что существует и является единственным число $g(\eta) \in \mathbb{R}$ такое, что для любой координаты $\xi \in \left\{\xi \middle| (\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}\right\}$ функция $\tilde{u}(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + g(\eta).$

Так как $\tilde{u}(\xi,\eta) \in C^2\left(\tilde{\Omega}\right)$ и $\Phi(\xi) \in C^2(\alpha;\beta),$ то $g(\eta) \in C^2(\alpha;\beta).$

Вывод: существуют функции $f(\xi) \in C^2(\alpha;\beta)$ и $g(\eta) \in C^2(\alpha;\beta)$ такие, что в любом элементе $(\xi,\eta) \in \tilde{\Omega}$ функция

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta). \tag{2.2.7}$$

<u>Шаг 3</u>. Ищем функции $f(\xi)$ и $g(\eta).$ Для любой точки $(x,t) \in \Omega$ имеем

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at). \tag{2.2.8}$$

Вычислив производную от (2.2.8). Для любой точки $(x,t) \in \Omega$ имеем

$$u_t(x,t) = -af'(x - at) + ag'(x + at). \tag{2.2.9}$$

Для любого числа $x \in (\alpha;\beta),$ положив в (2.2.8) и (2.2.9) $t = 0,$ имеем

$$u_0(x) = f(x) + g(x), \qquad u_1(x) = -af'(x) + ag'(x), \tag{2.2.10}$$

откуда следует необходимое условие существования решения

$$u_0(x) \in C^2(\alpha;\beta) \quad \wedge \quad u_1(x) \in C^1(\alpha;\beta). \tag{2.2.11}$$

Если утверждение (2.2.11) не верно, то решений нет.

Пусть утверждение (2.2.11) верно. Тогда из (2.2.10) следует, что

$$g'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) + \frac{1}{2a}u_1(x). \tag{2.2.12}$$

Интегрируя (2.2.12) и используя (2.2.10), получим, что существуют числа $\gamma \in (\alpha;\beta)$ и $c \in \mathbb{R}$ такие, что для любого числа $x \in (\alpha;\beta)$ функции

$$g(x)=\frac{u_0(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{\gamma}^{x}u_1(\zeta)\,d\zeta+c \tag{2.2.13}$$

и

$$f(x)=\frac{u_0(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{\gamma}^{x}u_1(\zeta)\,d\zeta-c. \tag{2.2.14}$$

Шаг 4. Составляем функцию $u(x,t)$. Подставляем (2.2.14) и (2.2.13) в (2.2.7); получаем, что для любого элемента $(\xi,\eta)\in\tilde{\Omega}$ функция

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=\frac{u_0(\xi)+u_0(\eta)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{\xi}^{\eta}u_1(\zeta)\,d\zeta,$$

т.е. верна *формула Даламбера для однородного уравнения*

$$u(x,t)=\frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\zeta)\,d\zeta,\ \ (x,t)\in\Omega. \tag{2.2.15}$$

Пусть функция $U(x,t)$ – правая часть равенства (2.2.15). Вывод: $U(x,t)$ – кандидат, причём единственный, так как не зависит от чисел γ и c.

Этап 2. Проверяем кандидата.

Шаг 5. Проверяем, что кандидат является решением на Ω.

Так как выполнены необходимые условия (2.2.11), то образ $\tilde{U}(\xi,\eta)$ – решение уравнения (2.2.6), что очевидно, и по теореме 1.1.1 (о преобразовании дифференциальных уравнений при замене системы координат) функция $U(x,t)$ – решение уравнения (2.2.4).

Подставляем (2.2.15) в (2.2.1); получаем верные равенства.

Вывод: $U(x,t)$ – единственное решение. ■

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 2.2.1 (о формуле Даламбера для однородного уравнения)**.** *Пусть задана задача Коши* (2.2.4)–(2.2.5).

Если выполнено необходимое условие (2.2.11)*, то решение существует и единственно и для решения* $u(x,t)$, $(x,t)\in\Omega$, *верно равенство* (2.2.15).

Если необходимое условие (2.2.11) *не выполнено, то решений нет.*

Следствие 2.2.1 (о непрерывной зависимости решения задачи Коши на элементарной области от исходных функций)**.** *Пусть задана задача Коши* (2.2.4)–(2.2.5).

Если выполнено необходимое условие (2.2.11)*, то для решения в каждой точке* $(x,t)\in\Omega$ *верна оценка*

$$\left|u(x,t)\right| \le \frac{\left|u_0(x-at)\right|+\left|u_0(x+at)\right|}{2} + t \sup_{x'\in(x-at;x+at)} \left|u_1(x')\right|. \quad (2.2.16)$$

□ Неравенство (2.2.16) следует из (2.2.15). ■

Терема 2.2.2 (о наибольшей области существования и единственности решения). *Пусть заданы уравнение* (2.2.4) *, условия Коши* (2.2.5) *и выполнены условия* (2.2.11). *Тогда у задачи Коши характеристический четырёхугольник*

$$Q := \left\{(x,t) \middle|\ \alpha < x-at < \beta \wedge \alpha < x+at < \beta\right\}$$

является наибольшей областью, на которой решение задачи Коши (2.2.4)–(2.2.5) *существует и является единственным.*

□ Применяем *функцию «шапочка»*

$$\omega(\zeta) \triangleq \left(\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{\tau^2-1}} d\tau\right)^{-1} \cdot \begin{cases} e^{\frac{1}{\zeta^2-1}}, & |\zeta|<1, \\ 0, & |\zeta|\ge 1. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Легко проверить, что $\omega(\zeta)\in C^{\infty}(\mathbb{R}),$ причём $\omega(\zeta)>0$ при $|\zeta|<1$ и $\omega(\zeta)=0$ при $|\zeta|\ge 1.$

От противного. Если существует и является единственным решение $u(x,t)$ на области $\Omega \not\subset Q,$ то существует точка $(\dot{x},\dot{t}) \subset \Omega \setminus \bar{Q}$ такая, что $\xi(\dot{x},\dot{t}) \notin [\alpha;\beta] \vee \eta(\dot{x},\dot{t}) \notin [\alpha;\beta].$

Если число $\xi(\dot{x},\dot{t}) > \beta,$ то иным решением является функция $v(x,t),$ $(x,t)\in\Omega,$ с образом

$$\tilde{v}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi,\eta) + \omega\left(\left(\xi-\xi(\dot{x},\dot{t})\right)\big/\left(\xi(\dot{x},\dot{t})-\beta\right)\right), \quad (\xi,\eta)\in\tilde{\Omega}.$$

Если число $\xi(\dot{x},\dot{t}) < \alpha,$ то иным решением является функция $v(x,t),$ $(x,t)\in\Omega,$ с образом

$$\tilde{v}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi,\eta) + \omega\left(\left(\xi-\xi(\dot{x},\dot{t})\right)\big/\left(\xi(\dot{x},\dot{t})-\alpha\right)\right), \ (\xi,\eta)\in\tilde{\Omega}.$$

Если число $\eta(\dot{x},\dot{t}) > \beta,$ то иным решением является функция $v(x,t),$ $(x,t)\in\Omega,$ с образом

$$\tilde{v}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\xi,\eta) + \omega\left(\left(\eta-\eta(\dot{x},\dot{t})\right)\big/\left(\eta(\dot{x},\dot{t})-\beta\right)\right), \quad (\xi,\eta)\in\tilde{\Omega}.$$

Если число $\eta(\dot{x},\dot{t}) < \alpha,$ то иным решением является функция $v(x,t),$ $(x,t)\in\Omega,$ с образом

$$\tilde{v}(\xi,\eta)=\tilde{u}(\xi,\eta)+\omega\Big(\big(\eta-\eta(\dot{x},\dot{t})\big)\big/\big(\eta(\dot{x},\dot{t})-\alpha\big)\Big),\quad (\xi,\eta)\in\tilde{\Omega}. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.2.2 (решения задачи Коши для гиперболического уравнения на наибольшей области существования и единственности решения)**.** Решить задачу Коши на наибольшей области, где решение существует и единственно, и указать эту область

$$2x^2u_{xx}+xyu_{xy}-y^2u_{yy}-4xu_x+2yu_y=0, \qquad x>0,\ \ 0<y<\sqrt{x},$$

$$u\big|_{y=1}=0, \qquad u_y\big|_{y=1}=3, \qquad 1<x<2.$$

□ Шаг 1. Вводим характеристическую систему координат. Составляем уравнение характеристик $2x^2dy^2-xydydx-\ y^2dx^2=0$ и записываем его левую часть в виде произведения с двумя линейными сомножителями: например, 1) составляем и решаем соответствующее алгебраическое квадратное уравнение $2x^2\lambda^2-xy\lambda-y^2=0;$ получаем корни $\lambda_1=y/x$ и $\lambda_2=-y/2x;$ 2) записываем уравнение характеристик в виде

$$2x^2\left(dy-\lambda_1dx\right)\left(dy-\lambda_2dx\right)=0,\ \text{т.е.}\ 2x^2\left(dy-\frac{y}{x}dx\right)\left(dy+\frac{y}{2x}dx\right)=0.$$

Ищем общие решения возникших линейных уравнений характеристик в дифференциалах:

$$dy+\frac{y}{2x}dx=0,\ \text{т.е.}\ \frac{2dy}{y}+\frac{dx}{x}=0,\ \text{т.е.}\ \ln y^2+\ln|x|=C,\ \ \text{т.е.}\ \ y^2x=C_1;$$

$$dy-\frac{y}{x}dx=0,\ \text{т.е.}\ \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0,\ \text{т.е.}\ \ln|y|-\ln|x|=C,\ \text{т.е.}\ \frac{y}{x}=C_2.$$

На области $\{x>0\wedge y>0\}$ задания дифференциального уравнения вводим характеристическую систему координат (ξ,η) по формулам $\xi=y^2x$ и $\eta=\dfrac{y}{x}$. Действительно, отображение является взаимно однозначным, дважды непрерывно дифференцируемым и невырожденным, так как: 1) $\forall\ (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2_+$ таких, что

$y^2x=y'^2x'\wedge\dfrac{y}{x}=\dfrac{y'}{x'}\hookrightarrow(x,y)=(x',y')$; 2) очевидно принадлежит

$C^2\left(\mathbb{R}^2_+\right)$; 3) $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2_+\ \hookrightarrow\ \begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y^2 & 2yx\\ -y/x^2 & 1/x\end{vmatrix}\neq 0.$

Шаг 2. Строим характеристический четырёхугольник задачи Коши. Характеристические координаты на концах интервала задания условия