УЧЕБНЫЕ ИЗДАНИЯ ДЛЯ МАГИСТРОВ

А. И. Бородин, И. Ю. Выгодчикова,
Н. Н. Наточеева

ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«Дашков и К°»
Издательско-торговая корпорация

УДК 330.1, 330.4, 336.7 (075.8)
ББК 65.290-93я73
Б83

Авторы:

А. И. Бородин – доктор экономических наук, профессор кафедры финансового менеджмента РЭУ им. Г. В. Плеханова;

И. Ю. Выгодчикова – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» (СарГУ);

Н. Н. Наточеева – доктор экономических наук, профессор кафедры финансовых рынков РЭУ им. Г. В. Плеханова.

Рецензенты:

Е. Д. Стрельцова – доктор экономических наук, профессор ФГБОУ ВО «ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова»;

Н. В. Цхададзе – доктор экономических наук, профессор Департамента экономической теории Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Бородин, Александр Иванович.

Б83 Финансовый менеджмент: методы и модели : учебное пособие / А. И. Бородин, И. Ю. Выгодчикова, Н. Н. Наточеева. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2022. – 303 с.

ISBN 978-5-394-04834-0.
DOI 10.29030/978-5-394-04834-0-2022.

Предлагаемое учебное пособие предоставляет читателю возможность ознакомиться с методами финансового менеджмента, позволяющими получить верное (оптимальное) решение на основе принципиальной аналитической модели.

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.04.01 «Экономика» (уровень магистратуры), а также руководителей компаний, аналитиков, научных работников.

ISBN 978-5-394-04834-0

СОДЕРЖАНИЕ

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПОДХОД: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Для оценки стоимости финансовых ресурсов и принятия оптимальных финансовых решений применяется аппарат финансовой математики, представленный ниже. Лицу, принимающему решение, следует понять и осознать инструментарий процентных расчетов перед первой сделкой, совершенной для увеличения капитала.

1.1. Наращение и дисконтирование

Пусть некоторая денежная сумма $S(0)$ вложена в банк, инвестирована в дело или предоставлена в долг (начальная сумма денег), T – срок сделки в годах; $S(T)$ – возвращаемая денежная сумма через период T.

Наращение – это вычисление будущей стоимости $S(T)$ текущей денежной суммы $S(0)$.

Дисконтирование – это вычисление текущей стоимости $S(0)$ будущей денежной суммы $S(T)$.

Обозначим через r годовую процентную ставку, а через d – ставку дисконтирования (другие термины: учетная ставка, скидка, экономия денежных средств).

Временна́я диаграмма – это одномерный график, показывающий периоды времени в порядке возрастания и соответствующие суммы, относящиеся к этим периодам времени (рис. 1.1).

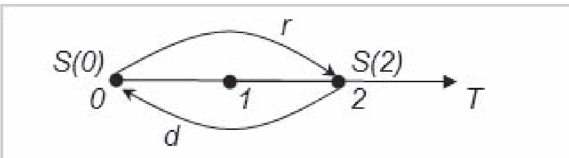

Рис. 1.1. Временная диаграмма

Важно понимать, что наращение и дисконтирование – это взаимнообратные операции, и ставки r (процентная ставка) и d (учетная ставка) взаимосвязаны.

Зависимость между ними определяется способом начисления денег. Для вычисления ставок за рассматриваемый период времени T применяются следующие формулы:

$$r = (S(T) - S(0)) / S(0);$$
$$d = (S(T) - S(0)) / S(T),$$

откуда получаем следующую зависимость между процентной и учетной ставками:

$$r = d / (1 - d); \qquad d = r / (1 + r).$$

Не сложно догадаться, что $d < r$.

Если операция носит моментальный характер, то ставки приравниваются к годовым, а срок считается условно «годом». Подобные операции связаны с удержанием комиссионных сумм (комиссионное вознаграждение получают посредник, брокер, банк за определенные услуги, связанные с осуществлением финансовых транзакций между сторонами сделки).

Комиссия – это снятие процентов за осуществление финансовой операции.

Рассмотрим основные схему наращения процентов, используемые в практике финансовых вычислений: схему простых процентов, схему сложных процентов.

***Схема простых процентов*:**

$$S(T) = S(0) \cdot (1 + T \cdot r). \tag{1.1}$$

В формуле (1.1) используются следующие величины:

$S(0)$ – исходная сумма вклада (кредита);

$S(T)$ – конечная сумма вклада (кредита);

T – срок вклада (кредита) в годах;

r – годовая ставка процентов.

Формулу (1.1) можно записать в следующем виде:

$$S(T) = S(0) + S(0) \cdot T \cdot r,$$

где сумма $S(0) \cdot T \cdot r$ выражает накопленные проценты за T лет на исходную сумму вклада (кредита) $S(0)$.

Воспользуемся формулой (1.1), считая, что $T = 1$. Тогда через год накопится сумма

$$S(1) = S(0) \cdot (1 + r) \ .$$

Если полученную сумму снять и переложить под тот же процент, то через два года накопится сумма

$$S(2) = S(1) \cdot (1 + r) = S(0) \cdot (1 + r)^2 \ .$$

Продолжая начисление «процентов на процент», приходим к схеме сложных процентов.

***Схема сложных процентов*:**

$$S(T) = S(0) \cdot (1 + r)^T \tag{1.2}$$

(при начислении сложных процентов ежегодно),

$$S(T) = S(0)\left(1 + r / m\right)^{T \cdot m} \tag{1.3}$$

(при начислении сложных процентов m раз в году),

$$S(T) = S(0)\exp\left(T \cdot r\right) \tag{1.4}$$

(при начислении сложных процентов непрерывно, т. е. когда m «бесконечно» велико).

Замечание. Формула (1.4) получается из формулы (1.3) путем предельного перехода при $m \to \infty$:

$$\lim_{m \to \infty}\left(1 + r / m\right)^{T \cdot m} = \lim_{m \to \infty}\left(\left(1 + 1 / (m / r)\right)^{(m/r)}\right)^{T \cdot r} = \exp(T \cdot r).$$

Пример. Вклад 1 млн руб. открыт 12.01.2019 на 35 дней, годовая ставка – 5%. Вычислить накопленную на счете сумму при начислении по схеме простых процентов.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 35 / 365) = 1\ 004\ 794 \text{ руб. } 52 \text{ коп.}$$

Пример. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, годовая ставка составляет 5%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме простых процентов.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 2) = 1\ 100\ 000 \text{ руб.}$$

Пример. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, годовая ставка составляет 5%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов с начислением раз в год.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05)^2 = 1\ 102\ 500 \text{ руб.}$$

Пример. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, капитализация процентов по вкладу выполняется ежемесячно, годовая ставка составляет 5%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов с ежемесячным начислением.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05\ /\ 12)^{24} = 1\ 104\ 941 \text{ руб. } 34 \text{ коп.}$$

Пример. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, капитализация процентов по вкладу выполняется ежедневно, годовая ставка составляет 5%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов с ежедневным начислением (в году 365 дней).

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05\ /\ 365)^{2 \cdot 365} = 1\ 105\ 163 \text{ руб. } 35 \text{ коп.}$$

Пример. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, капитализация процентов по вкладу выполняется непрерывно, годовая ставка составляет 5%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов при непрерывном начислении.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot \exp(0{,}05) = 1\ 105\ 170 \text{ руб. } 92 \text{ коп.}$$

Замечание. Начисление процентов ежедневно (m = 365 или m = 366 в зависимости от длительности года) дает приблизительно тот же результат, что и непрерывное начисление («бесконечно большое m»).

Множителем наращения (мультиплицирующим множителем) M называют величину, на которую умножается начальная сумма $S(0)$ для получения конечной суммы $S(T)$.

В формуле наращения по простым процентам (1.1) мультиплицирующим множителем является величина $(1+T\cdot r)$.

В формуле наращения по сложным процентам, начисляемым раз в году (1.2), мультиплицирующим множителем является величина $(1+r)^T$.

В формуле наращения по сложным процентам, начисляемым m раз в году (1.3), мультиплицирующим множителем является величина $\left(1+r/m\right)^{T\cdot m}$.

В формуле наращения по сложным процентам, начисляемым непрерывно (1.4), мультиплицирующим множителем является величина $\exp\left(Tr\right)$.

Дисконтирующим множителем D называют величину, обратную М, т. е. величину, на которую умножается итоговая сумма $S(T)$ для получения первоначальной суммы $S(0)$.

$$D = 1 / M.$$

В приведенных формулах (1.1–1.4) дисконтирующие множители, соответственно, составляют $(1+T\cdot r)^{-1}$ для (1.1), $(1+r)^{-T}$ для (1.2), $\left(1+r/m\right)^{-T\cdot m}$ для (1.3), $\exp\left(-T\cdot r\right)$ для (1.4).

Учетная ставка по сложным процентам (d) – это ставка, эквивалентная ставке наращения r, позволяющей вернуть вложенные средства: если $S(T)=S(0)\cdot(1+r)^T$, то $S(0)=S(T)\cdot(1-d)^T$, поэтому $1 - d = 1 / (1 + r)$, то есть $r=d/(1-d)$, $d=r/(1+r)$.

Капитализация процентов – это присоединение процентов к базе начисления. При капитализации простые проценты участвуют в процессе начислений процентов на первоначальную базу с учетом начисленных процентов и тем самым порождают сложные проценты.

В банковской практике принято капитализировать проценты на дату осуществления операции. В данном случае используется точное число дней в году (365 или 366) и точное число дней операции.

Пример. Пусть вклад в сумме 300 000 руб. сделан 12.02.2018 (с ежемесячной капитализацией 4% годовых); нужно вычислить накопленные проценты к 12.04.2018.

Решение. Через месяц (12.03.2018) на сумму вклада будет начислено

$$28 / 365 \cdot 4\% = 0{,}30685\% ,$$

поэтому сумма процентов за месяц составит:

$$0{,}0030685 \cdot 300\ 000 \text{ руб.} = 920 \text{ руб. } 55 \text{ коп.}$$

Общая сумма вклада достигнет величины 300 920 руб. 55 коп. Далее, 12.04.2018 на текущую сумму вклада будет начислено

$$31 / 365 \cdot 4\% = 0{,}339726\% ,$$
$$0{,}00339726 \ \cdot 300\ 920 \text{ руб. } 55 \text{ коп} = 1022 \text{ руб. } 31 \text{ коп.}$$

Таким образом, через два месяца, 12.02.2018, вы сможете снять накопленные проценты в размере 1942 руб. 86 коп., а сумма 300 000 руб. останется на счете для дальнейшего накопления процентов.

Если даты операции не известны, то нужно пользоваться приближенными вычислениями (в каждом месяце – 30 дней) и обыкновенной базой расчетов (360 дней в году).

Пример. Пусть вложено 300 000 руб. на 2 мес. (с ежемесячной капитализацией 4% годовых). Вычислить накопленные проценты.

Решение. Через месяц на сумму вклада будет начислены проценты в размере 1000 руб. Через два месяца можно будет снять сумму процентов, равную 2003 руб. 33 коп.

Рост суммы процентов (по сравнению с предыдущим примером) связан с различием в количестве дней в месяце (в феврале – минимальное количество дней, поэтому при точном расчете проценты оказались меньше).

В современных системах расчетов редко используются приближенные проценты, более типичен точный расчет дней в периоде операции. Важно грамотно считать период финансовой операции: первый и последний дни считаются одним днем. Как правило, первый день входит в срок финансовой операции, а последний день нет (операция завершена). Например, при осуществлении сделки с 25 января по 25 февраля в расчетах используется срок сделки 31 день.

Если срок сделки не является целой величиной, обычно используется ***комбинированная схема начисления процентов***.

Пусть сложные проценты начисляются ежегодно, тогда формула наращения по комбинированной схеме имеет вид

$$S(T) = S(0)(1+r)^{[T]}(1+r \cdot \{T\}), \tag{1.5}$$

где дробная часть числа лет выражается по формуле

$$\{T\} = T - [T],$$

где $[T]$ – целая часть числа лет.

Пусть сложные проценты начисляются m раз в году, тогда формула наращения по комбинированной схеме имеет вид

$$S(T) = S(0)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{[T] \cdot m + [\{T\} \cdot m]}\left(1+\frac{r}{m}\cdot\{T\}_m\right), \tag{1.6}$$

где

$$\{T\}_m = \{T\} \cdot m - [\{T\} \cdot m].$$

Пример. Вклад 1 000 000 руб. открыт 12.01.2017 на 2 года 4 дня, сложные проценты начисляются ежегодно, годовая ставка – 5%. Вычислить накопленную на счете сумму по комбинированной схеме.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05)^2 \cdot (\ 1 + 0{,}05 \cdot 4\ /\ 365) = 1\ 108\ 541\ \text{ руб. } 10\ \text{коп.}$$

Пример. Вклад 1 000 000 руб. открыт 12.01.2019 на 35 дней, капитализация ежемесячно, годовая ставка – 5%. Вычислить итоговую сумму по комбинированной схеме.

Решение:

$$1\ 000\ 000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 31\ /\ 365) \cdot (\ 1 + 0{,}05 \cdot 4\ /\ 365) =$$
$$= 100\ 4796\ \text{руб.}\ 85\ \text{коп.}$$

1.2. Эффективная ставка

Процентная ставка, которая используется в схеме ежегодного начисления процентов (и только она), носит название ***эффективной*** (термин применяется в основном в операциях по вкладам и в кредитовании). Понятие «эффективная ставка» – это терминологический близнец понятиям «внутренняя норма доходности», «внутренняя ставка доходности», «обещанная доходность». Любая из этих ставок предполагает, что инвестиции по ним возвращаются без остатка и задолженности со стороны получателя денег, причем в расчетах используется схема сложных процентов с начислением сложных процентов раз в году.

Пусть $S(0)$ – исходная сумма вклада (кредита);

$S(T)$ – конечная сумма вклада (кредита);

T – срок вклада (кредита) в годах.

Тогда расчет эффективной ставки выполняется по формуле

$$r_{ef} = \left(\frac{S(T)}{S(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 . \qquad (1.7)$$

Подставляя формулу (1.3) в (1.7), получаем формулу эффективной ставки при начислении сложных процентов m раз в году:

$$r_{ef} = \left(\frac{S(0)\left(1 + r / m\right)^{T \cdot m}}{S(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\left(1 + r / m\right)^{T \cdot m} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 ,$$

то есть

$$r_{ef} = \left(1 + r / m\right)^{m} - 1 .$$

В непрерывном случае из формул (1.4) и (1.7) получаем

$$r_{ef} = \exp(r) - 1 .$$

Пример. Банк предоставляет кредит на следующих условиях:

а) процентная ставка – 20% годовых, сложные проценты начисляются раз в год; б) процентная ставка – 19% годовых, проценты капитализируются ежемесячно. Какое условие предоставления кредита более выгодное для банка?

Решение. Вычисляем эффективную ставку. В случае *а* $r_{ef} = 20\%$, в случае *б* $r_{ef} = (1 + 0{,}19 / 12)^{12} - 1 = 0{,}2075 = 20{,}75\%$, поэтому банку следует предпочесть условие *б*.

Замечание. В MS Excel (а также в OpenOffice Calc и других электронных таблицах) существует удобный инструмент вычисления эффективной ставки. В MS Excel – это функция ЭФФЕКТ () (рис. 1.2).

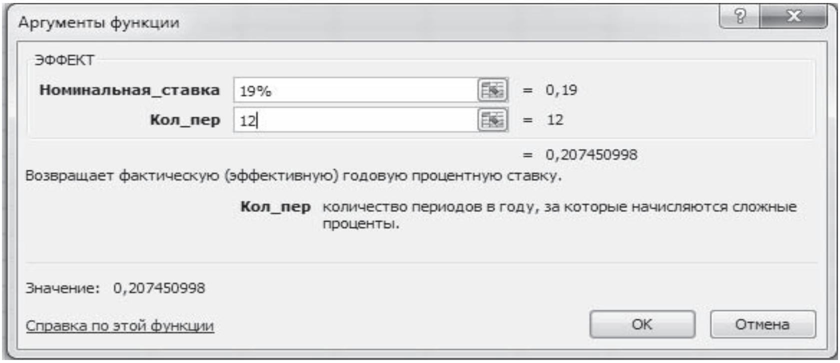

Рис. 1.2. Функция ЭФФЕКТ ()

Замечание. В MS Excel включена достаточно подробная справка по функциям с формулами и примерами расчета.

1.3. Эквивалентные финансовые обязательства

Эквивалентные ставки (сложные проценты). Эквивалентными называются финансовые обязательства, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени, оказываются равными. Заметим, что термин «приведение» в финансовых расчетах используется как для наращения, так и для дисконтирования.

Пусть суммы $S_1(T_1) < S_2(T_2)$ получены через $T_1 < T_2$ лет, соответственно.

Барьерной (критической) называется эффективная ставка финансовой операции, приводящая к эквивалентности денежных сумм.

Для отыскания барьерной ставки при использовании сложных процентов, начисляемых ежегодно, используется формула

$$r_0 = \left(\frac{S_2(T_2)}{S_1(T_1)} \right)^{\frac{1}{T_2 - T_1}} - 1 . \qquad (1.8)$$

С точки зрения сложных процентов $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ будут эквивалентными. Сопоставим два долгосрочных обязательства: выплатить сумму $S_1(T_1)$ через T_1 и сумму $S_2(T_2)$ через T_2, $S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$. Обязательства будут эквивалентными, если сумма $S_1(T_1)$, наращенная на $T_2 - T_1$ лет, будет равна сумме $S_2(T_2)$:

$$S_1\left(T_1\right)\cdot\left(1+r_0\right)^{T_2-T_1} = S_2\left(T_2\right).$$

Если процентная ставка ниже критической, предпочтительнее получить сумму, которая относится к более позднему моменту времени, а если процентная ставка выше критической ставки, то предпочтительнее более ранняя сумма.

Пример. Какую сумму предпочтительнее получить при сложной ставке 9% годовых: 1 000 000 руб. сегодня или 2 000 000 руб. через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

Решение. Вычисляем наращенную величину с 1 млн руб. по ставке 9% с использованием схемы сложных процентов, начисляемых ежегодно:

$$S(8) = 1\ 000\ 000\cdot(1+0{,}09)^8 = 20 < 2\ 000\ 000.$$

Предпочтительнее сумма 2 млн руб. через 8 лет. Определим барьерную ставку: $r_0 = 2^{0{,}125} - 1 = 0{,}0905 = 9{,}05\%$.

Пример. Какую сумму предпочтительнее получить при сложной ставке 9,5% годовых: 1 000 000 руб. сегодня или 2 000 000 руб. через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

Решение. Вычисляем наращенную величину с 1 млн руб. по ставке 9,5%:

$$S(8) = 1\ 000\ 000\cdot(1+0{,}095)^8 = 2\ 066\ 869 > 2\ 000\ 000.$$

При ставке 9,5% сумма 2 млн руб. через 8 лет менее привлекательна, чем 1 млн руб. сегодня. Барьерная ставка точно такая же, как и в предыдущем примере – $r_0 = 9{,}05\%$.

При начислении простых процентов барьерная (критическая) ставка r^0 (по простым процентам) находится из уравнения эквивалентности сумм при наращении по простым процентам:

$$S_1(T_1)\cdot(1+r^0(T_2-T_1))=S_2(T_2)\,,$$

откуда

$$r^0=\frac{(S_2(T_2)-S_1(T_1))}{S_1(T_1)\cdot(T_2-T_1)}\,. \tag{1.9}$$

Процентные ставки (1.8) и (1.9) связаны соотношением

$$\left(1+r_0\right)^{T_2-T_1}=1+r^0(T_2-T_1)\,,$$

откуда находим:

$$r_0=(1+r^0(T_2-T_1))^{\frac{1}{T_2-T_1}}-1\,, \tag{1.10}$$

$$r^0=\frac{\left(1+r_0\right)^{T_2-T_1}-1}{(T_2-T_1)}\,. \tag{1.11}$$

В формулах (1.10) и (1.11) ставка r_0 является для ставки r^0 эквивалентной эффективной ставкой.

Пример. Какую сумму предпочтительнее получить при простой ставке 9,5% годовых: 1 000 000 руб. сегодня или 2 000 000 руб. через 8 лет? При каком значении простой процентной ставки выбор безразличен?

Решение. Вычисляем наращенную величину с 1 млн руб. по ставке 9% с использованием простых процентов:

$$S(8)=1\ 000\ 000\cdot(1+0{,}095\cdot 8)=1\ 760\ 000<2\ 000\ 000.$$

Предпочтительнее сумма 2 млн руб. через 8 лет.

Определим барьерную ставку по простым процентам с использованием формулы (1.9):

$$r^0=1/8=0{,}125=12{,}5\%\,.$$

Такой же результат получается при использовании формулы (1.11) с учетом найденной выше барьерной ставки по сложным процентам $r_0 = 9,05\%$.

Эквивалентными называются процентные ставки, при использовании которых доходность сделки сохраняется на уровне первоначального контракта.

Пример. Вложено 100 тыс. руб. на 2 года под 5% годовых с условием начисления простых процентов на всю сумму вклада в конце второго года. В целях унификации схем расчетов банк принял решение начислять сложные проценты раз в год. Какую ставку нужно предложить клиенту, чтобы он сохранил свои средства?

Решение. Клиенту нужно предложить ставку не менее $(1 + 2 \cdot 0,05)^{0,5} - 1 = 0,0488$ (4,88%). Тогда он получит через 2 года ожидаемую сумму 110 тыс. руб.

1.4. Инфляционная и реальная процентные ставки

Инфляция (в общем смысле) – это снижение реальной покупательной способности денег.

Существуют различные способы определения инфляционных индексов. Как правило, используются следующие индексы цен:

- индекс цен Ласпейреса (отношение стоимости выбранных продуктов потребительской корзины в текущих и базисных ценах, объемы потребления берутся за базисный период);
- индекс цен Пааше (отношение стоимости выбранных продуктов потребительской корзины в текущих и базисных ценах, объемы потребления берутся за текущий период);
- индекс цен Фишера (среднее геометрическое из индексов цен Ласпейреса и Пааше).

Эти индексы рассчитываются за месяц, год и несколько лет.

В финансовых вычислениях не рассматриваются подробности получения индекса цен, тут важна методика расчетов процентов с использованием инфляционного обесценивания.

Пусть $S(T)$ – наращенная сумма денег (номинальная сумма), $C(T)$ – наращенная сумма денег с учетом обесценения, h_t – годовой темп инфляции, J_p – индекс цен за T лет. Эти величины связаны соотношением

$$C(T) = S(T) / J_p,$$

где

$$J_p = \prod_{t=1}^{T} (1 + h_t).$$

При инфляции номинальная годовая процентная ставка называется брутто-ставкой (инфляционной ставкой), обозначим ее как r_b, а реальную процентную ставку обозначим как r, $r < r_b$.

Определим «средний эквивалентный» темп инфляции h из следующего условия:

$$J_p = \prod_{t=1}^{T} (1 + h_t) = (1 + h)^T.$$

Получаем:

$$h = \sqrt[T]{J_p} - 1 = (S(T) / C(T))^{(1/T)} - 1.$$

Если темп инфляции не меняется, то имеем:

$$h_t = h, \ t = \overline{1,T}.$$

Рассмотрим операции наращения в условиях инфляции по сложным процентам. Для номинальной суммы $S(T)$ при наращении процентов используется инфляционная ставка (брутто-ставка) реальной суммы $C(T)$. Далее, используя сложные проценты, имеем: $S(T) = S(0)(1 + r_b)^T$.

Для реальной суммы $C(T)$ при наращении процентов используется инфляционная ставка (брутто-ставка):

$$C(T) = S(0)(1 + r)^T.$$

Следовательно, имеем соотношение:

$$S(T) = C(T)J_p = C(T)(1 + h)^T.$$

Поэтому

$$S(T) = S(0)(1+r)^T (1+h)^T;$$

$$(1+r_b)^T = (1+r)^T (1+h)^T;$$

$$(1+r_b) = (1+r)(1+h),$$

откуда находим связь инфляционной ставки (брутто-ставки) и реальной процентной ставки:

$$r = (1+r_b)/(1+h) - 1;$$

$$r_b = r + h + r \cdot h.$$

Пример. Через 3 года планируется получить сумму 100 тыс. руб. Согласно прогнозам, темпы инфляции составят соответственно 10, 8 и 10%. Оцените сумму к получению с учетом ее обесценения.

Решение. Имеем $T = 3$, $S(T) = 100$ тыс. руб., $h_1 = 0{,}1$, $h_2 = 0{,}08$, $h_3 = 0{,}1$, поэтому $C(3) = 100\ 000 / (1{,}1 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1) = 76\ 522{,}8$ руб.

1.5. Учетная ставка по простым процентам (банковское дисконтирование)

Учетная ставка по простым процентам используется в банковской практике (учет векселей).

Вексель – документ, содержащий безусловное обязательство векселедателя выплатить векселедержателю определенную сумму денег к определенному моменту (вексель является долговой ценной бумагой).

Учет векселей представляет собой оплату банком собственного векселя до наступления срока платежа. При такой операции векселедержатель передает (продает) вексель банку по индоссаменту до наступления срока платежа и получает за это вексельную сумму за вычетом определенного процента от этой суммы. Каждый банк, учитывая векселя, устанавливает размер дисконта избирательно в зависимости от векселедержателя, предъявившего вексель к учету.

Банковское дисконтирование применяется для учета банком краткосрочных векселей. Клиент может обратиться в банк с просьбой погасить вексель досрочно. Банк может согласиться выплатить ему сумму, однако ее размер будет меньше, чем указано в векселе:

$$S(0) = S(T)(1 - T \cdot d) = S(T) - S(T) \cdot T \cdot d\,, \qquad (1.12)$$

где $S(0)$ – сумма выплаты по векселю;

$S(T)$ – номинал векселя;

T – доля года, равная отношению числа дней до срока платежа к длительности года;

d – годовая ставка дисконтирования, определяемая банком.

В качестве базы расчетов банки используют 360 дней или 365 (366) дней. При расчете эффективной ставки целесообразно применять 365 (366) дней, поскольку даты операции определены.

Дисконт (удержание) по данной операции составит

$$D = S(T) - S(0)\,.$$

Обычно годовая ставка дисконтирования по учетной операции значительно выше средней банковской ставки по кредитованию ввиду того, что срок мал, при этом банк теряет время на оформление сделки в полноценном объеме.

Ставка дисконтирования вычисляется по формуле

$$d = D / S(T) = (S(T) - S(0)) / S(T)\,.$$

Рассмотрим операцию наращения по простым процентам. Имеем:

$$S(T) = S(0) \cdot (1 + r \cdot T)\,.$$

Для дисконтирования по простым процентам применяется следующая формула:

$$S(0) = S(T) \cdot (1 - d \cdot T)\,,$$

поэтому

$$1 - d \cdot T = 1 / (1 + r \cdot T)\,.$$

Для вычисления эффективной ставки применяется формула (1.7), поэтому имеем:

$$r_{ef} = \left(\frac{S(T)}{S(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \frac{1}{(1 - d \cdot T)^{\frac{1}{T}}} - 1 = (1 + r \cdot T)^{\frac{1}{T}} - 1\,.$$

Пример. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 2 000 000 руб. со сроком погашения 28.04.2019. Вексель предъявлен 13.04.2019. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 75% годовых. Какую сумму получит векселедержатель, если использовать базу расчетов: а) 360; б) 365?

Решение.

Для случая *а* имеем:

$$S(13.04.2019) = 2\,000\,000 \cdot \left(1 - \frac{15}{365} \cdot 0,75\right) =$$

$$= 2\ 000\ 000 - 61\ 644 = 1\ 938\ 356 \text{ руб.}$$

Вычислим эффективную процентную ставку:

$$r_{ef} = \left(\frac{2\ 000\ 000}{1\ 938\ 356}\right)^{(365/15)} - 1 \approx 114\% .$$

Для случая *б* имеем:

$$S(13.04.2019) = 2\,000\,000 \cdot \left(1 - \frac{15}{360} \cdot 0,75\right) = 1\ 937\ 500 \text{ руб.}$$

Вычислим эффективную процентную ставку:

$$r_{ef} = \left(\frac{2\ 000\ 000}{1\ 937\ 500}\right)^{(365/15)} - 1 \approx 117\% .$$

При вычислении эффективной ставки используется реальное количество дней в году (в 2019 г. – 365 дней). Эффективная ставка высока. Но банк честно заработал деньги, ведь он рискует не получить 2 000 000 руб. (вексель не является эмиссионной ценной бумагой, и риск по векселю весьма высок).

С повышенным риском связаны операции кредитования, осуществляемые компаниями «Быстроденьги», «Кредит до зарплаты» и прочими организациями, не являющимися банковскими структурами. Например, предлагается кредит по 0,5% в день (номинальная годовая ставка r составит 182,5%). Допустим, вы взяли кредит на 10 дней (20 000 руб.). Нужно иметь в виду, что проценты капитализируются ежедневно (считаем, что в году 365 дней), поэтому придется вернуть сумму

$$20\ 000 \cdot (1+0{,}005)^{365 \cdot 10/365} = 21\ 023 \text{ руб.}$$

Эффективная ставка составит

$$(1+0{,}005)^{365} - 1 \approx 517{,}47\% .$$

Эффективная ставка для данной операции – более 500%. То есть, пользуясь подобными кредитами регулярно, вы должны отдать в счет оплаты задолженности более 83% (6,1747 / 5,1747) от заработанных денег, и лишь 17% останется на собственное потребление.

Задачи с ответами

1. Банк предоставил ссуду в размере 1 млн руб. на 30 мес. под 30% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах начисления процентов.

Ответ: а) при простых процентах – 1,75 млн руб.; б) при сложных процентах – 1,927 млн руб.; в) при использовании комбинированной схемы – 1,944 млн руб.

2. Фирме нужно накопить 2 млн руб., чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Покупаются государственные ценные бумаги, генерирующие годовой доход по ставке 8% при полугодовом начислении сложных процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы?

Ответ: 913 тыс. руб.

3. Векселедержатель предъявил 13.11.2018 вексель для учета в банке (номинал векселя – 5 млн руб., срок погашения – 28.11.2018). Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 75% годовых. Вычислить сумму, которую получит векселедержатель (в году считать 360 дней).

Ответ: 4,844 млн руб.

4. С суммы 1 млн руб. (стоимость отгруженного предпринимателем товара) удерживаются сложные проценты по годовой ставке 5% (оплата посреднику за реализацию товара в течение двух лет). Хватит ли предпринимателю денег для покрытия задолженности в 907 000 руб. Найти оставшуюся после выплаты долга сумму.

Ответ: хватит, остаток – 29 руб.

5. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: а) 25% годовых, ежемесячное начисление сложных процентов; б) 27% годовых, начисление сложных процентов раз в год?

Ответ: а).

6. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: а) 18% годовых, ежемесячное начисление сложных процентов; б) 20% годовых, начисление сложных процентов раз в год?

Ответ: б).

7. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, годовая ставка составляет 6%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме простых процентов.

Ответ: 1 120 000 руб.

8. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, годовая ставка составляет 6%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов с начислением раз в год.

Ответ: 1 123 600 руб.

9. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, капитализация процентов по вкладу выполняется ежемесячно, годовая ставка составляет 6%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов с ежемесячным начислением.

Ответ: 1 127 159 руб. 78 коп.

10. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, капитализация процентов по вкладу выполняется ежедневно, годовая ставка

составляет 6%. Вычислить накопленную на счете сумму по схеме сложных процентов с ежедневным начислением (в году 365 дней).

Ответ: 1 127 485 руб. 73 коп.

11. Вклад в размере 1 млн руб. открыт на срок 2 года, капитализация процентов по вкладу выполняется непрерывно, годовая ставка составляет 6%. Вычислить накопленную на счете сумму.

Ответ: 1 127 496 руб. 85 коп.

12. Банк принимает вклады под 8% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов. Годовой темп инфляции – 7%. Определите реальную процентную ставку.

Ответ: 0,93%.

Вопросы с вариантами ответа

1. Формула наращения начальной суммы $S(0)$ на T лет по простым процентам (r – годовая процентная ставка) до величины $S(T)$:

1) $S(T) = S(0)(1 - T \cdot r)$;

2) $S(T) = S(0)(1 + r)^T$;

3) $S(T) = S(0)T \cdot r$;

4) $S(T) = S(0)(1 + T \cdot r)$.

2. Формула наращения начальной суммы $S(0)$ на T лет по сложным процентам (r – годовая процентная ставка) до величины $S(T)$:

1) $S(T) = S(0)(1 - T \cdot r)$;

2) $S(T) = S(0)(1 + r)^T$;

3) $S(T) = S(0)T \cdot r$;

4) $S(T) = S(0)(1 + T \cdot r)$.

3. *Наращение* – это:

1) вычисление будущей стоимости текущего денежного поступления;

2) вычисление текущей стоимости будущего денежного поступления;

3) расчет относительной скидки, эквивалентной заданной процентной ставке;

4) графическое изображение финансовой операции.

4. *Дисконтирование* – это:

1) вычисление будущей стоимости текущего денежного поступления;

2) вычисление текущей стоимости будущего денежного поступления;

3) расчет относительной скидки, эквивалентной заданной процентной ставке;

4) графическое изображение финансовой операции.

5. *Капитализация процентов* – это:

1) присоединение процентов к базе начисления;

2) пополнение вклада;

3) закрытие вклада.

6. Сумма 80 000 руб. вложена в банк на 1 мес. под 6,5% годовых. Через месяц сумма накопленных процентов снята, добавлено еще 20 000 руб. и полученная сумма вложена в другой банк под 7% годовых по простым процентам. В первом банке сумма 80 000 руб. оставлена на 11 мес. (до окончания года), поскольку в первом банке предусмотрена ежемесячная капитализация процентов, исходя из готовой ставки 6,5%. Хватит ли денег на покупку за 106 000 руб. дачного участка?

Варианты ответа:

- не хватит 17 руб.;
- хватит, останется 15 руб.;
- хватит, останется 642 руб.

7. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 500 000 руб. со сроком погашения 28.01.2019. Вексель предъявлен 13.12.2018. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 45% годовых. Какую сумму получит векселедержатель (база расчетов – 360 дней)?

Варианты ответа:

- 471 250 руб.;
- 444 542 руб.;
- 498 540 руб.;
- 432 910 руб.;