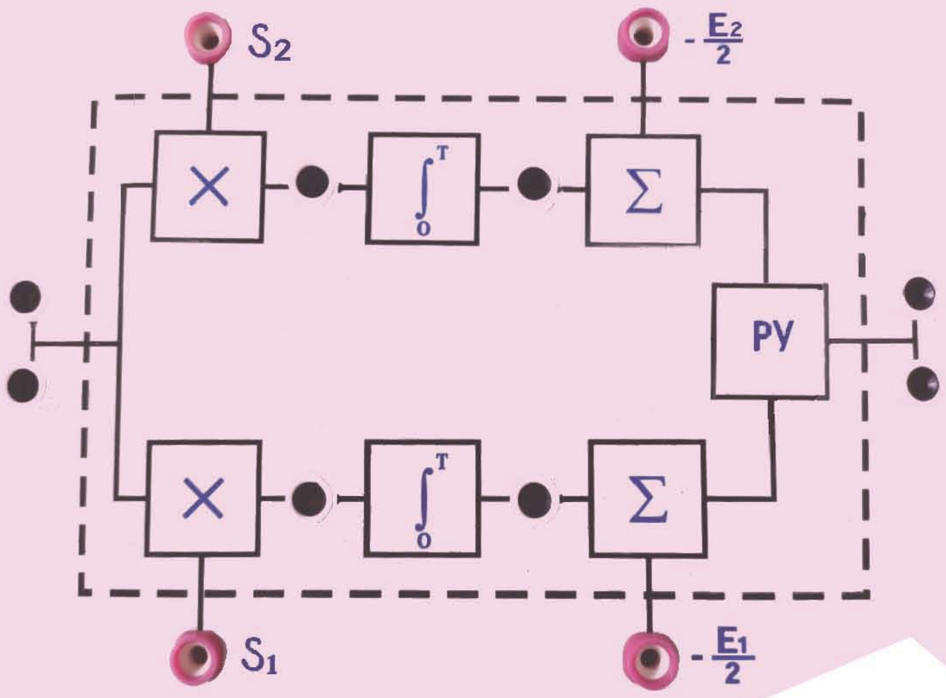
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА

Учебное пособие



ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНОЙ ФИЗИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

УДК 621.396:519.22(07)
ББК 32.84я73
С781

Р е ц е н з е н т ы:

В. М. Владимиров, доктор технических наук, профессор, генеральный директор ООО НПФ «Электрон»;

В. Е. Зобов, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории радиоспектроскопии и спиновой электроники Института физики ФИЦ КНЦ СО РАН

С781 **Статистическая радиотехника** : учеб. пособие / В. Б. Кашкин, А. А. Баскова, А. С. Пустошилов, Я. И. Сенченко. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – 152 с.

ISBN 978-5-7638-4320-0

Представлены основные сведения по теории вероятностей: теоремы сложения и умножения вероятностей, теоремы Лапласа и Пуассона, формулы Байеса и Бернулли. Приведены законы распределения для дискретных и непрерывных случайных величин, их числовые характеристики. Рассмотрены основы теории статистической радиотехники; считается, что помеха – стационарный случайный процесс. Дано представление такого процесса интегралом Фурье – Стилтьеса, приведена теорема Винера – Хинчина. Решаются задачи теории и практики помехоустойчивости: согласованный фильтр, фильтр Винера, фильтр Калмана; оптимальное обнаружение/различение сигналов по критериям Неймана – Пирсона, идеального наблюдателя. Охарактеризована помехоустойчивость систем связи с амплитудной, частотной и фазовой модуляциями. Описаны проблемы оценки параметров сигналов в присутствии помех.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 11.03.01 «Радиотехника», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы», 12.03.01 «Приборостроение» и 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования».

Электронный вариант издания см.:
http://catalog.sfu-kras.ru

УДК 621.396:519.22(07)
ББК 32.84я73

ISBN 978-5-7638-4320-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В процессе эксплуатации различных радиотехнических систем, а также при их разработке с целью обеспечить заданные технические характеристики приходится сталкиваться с рядом явлений (событий, величин, процессов), исход которых в тех или иных условиях предсказать заранее невозможно.

Объясняется это тем, что на исход этих явлений оказывает влияние множество факторов, совокупный результат действия которых практически непредсказуем.

Из интересующих нас областей радиотехнических систем к таким явлениям можно отнести:

1) величину сигнала на входе приемного устройства в заданный момент времени;

2) прием или неприем конкретного сигнала конкретным приемным устройством;

3) отказ или работоспособность того или иного узла радиотехнической системы в данный момент времени.

Общее требование, обычно предъявляемое к любой радиотехнической системе, состоит в достоверном и своевременном получении возможно большего объема информации из излучений с ограниченной энергией.

Достоверному приему информации по реальным радиоканалам препятствуют:

1) случайные искажения сигнала при распространении через среду с меняющимися параметрами;

2) наличие разнообразных внешних и внутренних помех;

3) техническое несовершенство радиоустройства, в том числе возможные отказы элементов аппаратуры.

Таким образом, постоянно приходится сталкиваться с явлениями, которые точно нельзя предсказать.

Такие явления называют случайными. Случайные явления описывают с помощью трех групп моделей:

1) случайные события – это качественные характеристики случайного явления;

2) случайные величины – это количественные характеристики, которые не меняются ни во времени, ни в пространстве;

3) случайные процессы – это количественные характеристики, которые меняются во времени и в пространстве.

При этом термин «случайное событие» в определенном смысле является более применимым к случайному явлению. Так, например, случайную величину можно рассматривать как случайное событие, заключающееся в том, примет или не примет случайная величина некоторое конкретное значение.

В свою очередь, случайный процесс представляет собой случайную последовательность случайных событий.

Итак, случайное явление есть результат действия очень многих случайных причин. Учесть влияние всех этих причин на результат невозможно, так как число их не очень велико, а законы их действия неизвестны. Поэтому предсказать, произойдет или нет единичное случайное явление, невозможно. Однако если речь идет о массовых однородных случайных явлениях, т. е. о явлениях, которые могут многократно повторяться, то оказывается, что достаточно большое число однородных случайных явлений подчиняется определенным закономерностям, так называемым вероятностным закономерностям.

Установлением или выявлением этих закономерностей занимается теория вероятностей. Таким образом, предметом теории вероятности является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных явлений. Эти закономерности представляют собой некоторые неслучайные, так называемые статистические характеристики, например, вероятность, закон распределения, математическое ожидание, дисперсия и др. В частности, понятие «вероятность» выступает как количественная оценка степени возможности явления (события).

Построением и изучением свойств оценок статистических характеристик занимается математическая статистика, при этом оценки строятся на основе конечной последовательности измерений.

Рассмотрение же разнообразных задач радиотехники (с учетом случайного характера радиосигнала и наличия помех) на базе теории вероятности и математической статистики составляет основное содержание статистической радиотехники.

Возвращаясь к требованиям, предъявляемым к радиотехническим системам, отметим, что искажения сигнала и помехи уменьшают вероятность правильного приема информации, а принимаемые сообщения всегда являются в той или иной мере случайными. В этих условиях теория вероятности и математическая статистика дают математический аппарат, позволяющий оперировать со случайными величинами и случайными процессами. В статистической радиотехнике можно выделить две главные задачи: задачу анализа и задачу синтеза радиотехнических систем.

Задачу анализа можно сформулировать следующим образом: при известных характеристиках сигнала и помех определить необходимые (интересующие нас) количественные характеристики работы радиосистемы. По существу, эта задача сводится к анализу прохождения сигнала и шума через различные линейные и нелинейные устройства.

Задача синтеза может быть сформулирована следующим способом: при известных характеристиках передаваемого сигнала, радиоканала и помех нужно получить (сконструировать) оптимальное радиоприемное устройство, которое воспроизводило бы переданное сообщение с наименьшими ошибками.

Ясно, что синтез радиотехнических систем не исключает необходимость их анализа.

Статистические методы анализа и обработки сигналов, особенно в технике оптимального приема, в последние десятилетия находят все более широкое применение. Среди основных направлений, по которым развивалось изучение случайных явлений в радиотехнике, можно назвать следующие:

1) анализ внутренних флуктуационных шумов в элементах радиоустройств;

2) изучение статистических характеристик внешних помех;

3) анализ влияния флуктуационных шумов и внешних помех на работу радиоаппаратуры (в частности, на качество приема);

4) исследование искажений радиосигналов при их распространении в различных условиях;

5) изыскание методов уменьшения влияния шумов и помех и синтез на этой основе радиоустройств с наиболее оптимальными характеристиками.

В учебном пособии излагаются основы теории случайных процессов в приложении к задачам линейной и нелинейной радиотехники. Для изучения данного курса требуется знание таких дисциплин, как «Основы теории цепей», «Радиотехнические цепи и сигналы» (линейная и нелинейная части). Данный курс является базовым для изучения последующих радиотехнических дисциплин: «Устройства приёма и обработки сигналов», «Устройства генерирования и формирования сигналов», «Системы передачи информации» и другие.

В учебном пособии рассмотрены основные законы распределения случайных величин, а также методы расчета важнейших характеристик стационарных случайных процессов после их прохождения через типовые линейные и нелинейные радиотехнические цепи. Приведены примеры решения задач по нахождению статистических характеристик случайных процессов. В приложении описана методика использования аппаратно-программного комплекса PC-Lab для выполнения лабораторных заданий и дальнейшей статистической обработки сигналов в MatLab.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Испытания и события

Все наблюдаемые события можно разделить на три вида:

1) достоверные;

2) невозможные;

3) случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий (обозначается Ω).

Невозможным называют событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий заведомо не произойдет (обозначается ∅).

Случайным называют событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий может или произойти, или не произойти.

Пример. Монета подброшена вверх (условие).

Событие «монета упала на пол» – достоверное.

Событие «монета повисла в воздухе» – невозможное.

Событие «монета упала определенной гранью вверх» – случайное.

Чтобы не повторять «осуществлена совокупность условий», говорят кратко «произведено испытание». Само событие рассматривается как результат испытания (исход испытания).

Пример. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на несколько областей. Выстрел – это испытание; попадание в определенную область – событие.

События обозначаются прописными буквами A, B, C и т. д.

События могут быть:

1) несовместные (несовместимые, непересекающиеся),

2) совместные (совместимые, пересекающиеся).

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании, т. е. никакие из них не могут произойти при одном и том же испытании вместе. В противном случае события называют **совместными**.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания обязательно произойдет хотя бы одно из них, т. е. появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. Полная группа событий (полное множество) обозначается через Ω (достоверное событие). События, входящие в полную группу (образующие полное множество), называются **элементарными** событиями (обозначаются через ω_i). Полное множество Ω называют также пространством элементарных событий.

Частный случай, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Пример. В урне находятся красные, синие и желтые шары. При извлечении из урны одного шара появится шар только одного какого-то цвета. События «появился красный шар», «появился синий шар» и «появился желтый шар» образуют полную группу попарно несовместимых событий.

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называют **противоположными**. Если одно из противоположных событий обозначается через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$ («не A»).

События называют **равновозможными**, если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример. При бросании игрального кубика выпадение любой грани – равновозможное событие.

1.2. Понятие вероятности

Вероятность есть числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события A при проведении испытания. Обозначается как $P(A)$.

Существует несколько определений понятия вероятности.

За **статистическую вероятность** принимают относительную частоту события или число, близкое к ней:

$$P(A) \approx \omega(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число проведенных испытаний; m – число испытаний, в которых событие A произошло; $\omega(A)$ – относительная частота события A.

Для достоверного события $m = n$ и $P(A)=1$.

Для невозможного события $m = 0$ и $P(A)=0$.

Для случайного события $0 < m < n$ и $0 < P(A) < 1$.

Для любого события $0 \le P(A) \le 1$, т. е. статистическая вероятность есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Классическое определение вероятности используется для равновозможных несовместных событий, образующих полную группу.

Классической вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где n – число всех равновозможных элементарных исходов испытания; m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Пример. В урне 6 одинаковых шаров, из них 1 – белый, 2 – красных, 3 – синих. Если вынуть из урны один шар на удачу, то возможно 6 элементарных исходов:

ω_1 – появился белый шар,

ω_2, ω_3 – появился красный шар,

ω_4, ω_5, ω_6 – появился синий шар.

Общее число возможных исходов $n = 6$.

Пусть интересующее нас событие A заключается в появлении цветного шара. Этому событию будут благоприятствовать 5 исходов:

ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6, т. е. $m = 5$.

Искомая вероятность появления цветного шара

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{6}.$$

Классическая вероятность неприменима к испытаниям с бесконечным числом исходов, например, попадание точки в некоторую область (отрезок, часть плоскости). Вероятность подобных событий может быть определена с помощью **геометрической** вероятности.

Вероятность попадания точки на отрезок l, являющийся частью отрезка L (событие A),

$$P(A)=\frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}.$$

Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L.

Аналогична вероятность попадания точки в некоторую плоскую фигуру g (событие A), составляющую часть плоской фигуры G:

$$P(A)=\frac{\text{Площадь } g}{\text{Площадь } G}.$$

1.3. Алгебра событий

Из элементарных событий, входящих во множество Ω, могут быть сконструированы сложные события на основе следующих трех операций:

1) сложение событий (обозначается через + или $\cup$),
2) умножение событий (обозначается через • или $\cap$),
3) вычитание событий (обозначается через – или \ ).

Суммой, или объединением событий A и B, называют событие $C=A+B$, состоящее в появлении или события A, или события B, или обоих этих событий (т. е. хотя бы одного из этих событий).

Произведением, или пересечением (совмещением) двух событий A и B, называют событие $C=A\cdot B$, состоящее в совместном появлении обоих этих событий. Разностью событий A и B называют событие $C=A-B$, заключающееся в том, что наступает событие A, но не наступает событие B.

Пример. Сигнал по радиоканалу передан дважды. Событие A – сигнал принят при первой передаче. Событие B – сигнал принят при второй передаче. Тогда событие $C=A+B$ (сумма событий) – сигнал принят или при первой передаче, или при второй, или оба раза, т. е. принят хотя бы один раз.

Событие $C=A\cdot B$ (произведение событий) – сигнал принят оба раза.

Событие $C=A-B$ (разность событий) – сигнал принят при первой передаче и не принят при второй.

Некоторые операции над случайными событиями:

1. Для событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$. Соответственно $A + \overline{A} = \Omega$.

2. Для несовместных событий A и B: $A \cdot B = \varnothing$, соответственно $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

3. $A \cdot B = B \cdot A$.

4. $A + A = A$.

5. $A \cdot A = A$.

6. $A + \Omega = \Omega$.

7. $A \cdot \Omega = A$.

8. $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

9. $A + \varnothing = A$.

10. $A - B = A \cdot \overline{B}$.

11. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

12. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

13. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

14. $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$.

15. $A + B = A + (B - A)$.

16. $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$.

2. ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2.1}$$

Аналогично для нескольких несовместных событий, образующих полную группу, равно единице:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Следствие 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{2.2}$$

Для противоположных событий обычно применяют следующие обозначения вероятностей:

$$P(A)=p, P(\overline{A})=q,\ p+q=1.$$

2.2. Условная вероятность

Условной вероятностью $P(B/A)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло: