Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.М. НАЗАРОВА, И.М. ПУПЫШЕВ, В.В. ХАБЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 517.91(075.8)
Н192

Рецензенты: *А. Г. Пинус,* д-р физ.-мат. наук, профессор,
Г. С. Шефель, канд. физ.-мат. наук, доцент.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики для студентов нематематических специальностей

Назарова Т.М.
Н192 Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Т. М. Назарова, И. М. Пупышев, В. В. Хаблов. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. — 100 с.

ISBN 978-5-7782-3404-8

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов II курса очного и заочного отделений технических направлений и специальностей. При его написании были использованы методические разработки и другие материалы, ранее изданные кафедрой высшей математики НГТУ. Эти материалы включены в текст пособия без ссылок, за что мы приносим свои извинения. Пособие подготовлено в связи с изменением учебных планов и выделением дифференциальных уравнений в отдельную дисциплину. К сожалению это изменение сопровождалось значительным уменьшением выделяемых на чтение лекций часов. В результате часть включенного в пособие материала из реального лекционного курса выпадает. Соответствующие разделы помечены звездочкой и имеют справочный характер. Авторы надеются на то, что ситуация изменится, и планы будут приведены в норму.

Все замечания по содержанию данной работы просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

УДК 517.91(075.8)

ISBN 978-5-7782-3404-8

Оглавление

§1. Основные понятия, связанные с дифференциальными уравнениями

1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Моделирование явлений различной природы часто бывает основано на соотношениях, связывающих искомые величины и скорости их изменения, или дифференциалы изменяющихся величин. Такие соотношения отражают эмпирические законы и представляются в виде равенств, называемых дифференциальными уравнениями. Обратимся к примерам.

Пример 1.1. Пусть $x(t)$ — величина массы некоторого вещества, которое растворяется в жидкой среде по следующему закону: *в каждый момент в единицу времени растворяется десятая часть единицы массы вещества.* Этот закон можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{10}, \tag{1.1}$$

где производная $\dfrac{dx}{dt}$ выражает скорость изменения количества массы $x(t)$ по времени t, а отношение $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}$ указывает скорость изменения 1 единицы массы в 1 единицу времени; отрицательный знак правой части указывает на убывание величины $x(t)$ с течением времени. Все функции $x(t)$, удовлетворяющие уравнению (1.1), представляют описанный выше процесс растворения вещества.

Пример 1.2. Закон Ньютона о движении материальной точки постоянной массы в поле сил тяжести при постоянном ускорении свободного падения $g \approx 9,8\,\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ в отсутствие сил трения можно записать в виде векторного дифференциального уравнения

$$m\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = m\mathbf{g}, \tag{1.2}$$

где $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ — вектор ускорения движения, а $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения. Введём систему координат xOz, в которой ось Oz направлена вверх, а горизонтальная ось Ox — вправо. Тогда в проекциях на оси этой системы координат закон Ньютона представится в виде системы двух дифференциальных уравнений, являющихся координатной записью векторного уравнения (1.2),

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = -g. \end{cases} \tag{1.3}$$

Связь между записями (1.2) и (1.3) такова:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left\{\frac{d^2x}{dt^2}; \frac{d^2z}{dt^2}\right\}, \quad \mathbf{g} = \{0, -g\}.$$

Все вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \{x(t), z(t)\}$, являющиеся решениями системы (1.3), представляют закон Ньютона о движении материальной точки в плоскости xOz.

В общем случае обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$\mathrm{F}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.4}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производные $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ до порядка n.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

1.1.1. Простейшие уравнения произвольного порядка

Простейшее уравнение n-го порядка — это уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x).$$

Общее решение этого уравнения можно найти последовательным интегрированием

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx = f_1(x), \quad y^{(n-2)} = \int f_1(x)\,dx = f_2(x), \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad y(x) = \int f_{n-1}(x)\,dx.$$

Например, для уравнения $y''' = x$ получим

$$y'' = \frac{x^2}{2} + \mathrm{C}_1; \quad y' = \frac{x^3}{6} + \mathrm{C}_1x + \mathrm{C}_2; \quad y = \frac{x^4}{24} + \mathrm{C}_1\frac{x^2}{2} + \mathrm{C}_2x + \mathrm{C}_3.$$

Сохраняя обозначение C_1 для постоянной $\frac{C_1}{2}$ (это не изменит множества произвольных значений множителя при x^2), получим общее решение

$$y = \frac{x^4}{24} + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

В полученном ответе можно заметить некоторые черты, которые, как мы потом увидим, отражают общие свойства решений дифференциальных уравнений.

- Общее решение зависит от независимой переменной x и от произвольных постоянных C_1, C_2, C_3.
- Число произвольных постоянных совпадает с порядком уравнения.
- Разным наборам C_1, C_2, C_3 отвечают разные решения.

1.1.2. Формы дифференциального уравнения первого порядка

Анализ решений дифференциального уравнения первого порядка общего вида

$$F(x,y,y') = 0, \tag{1.5}$$

задача сложная, чаще изучают уравнение, разрещенное относительно производной

$$y' = f(x,y). \tag{1.6}$$

Если умножить это уравнение на dx и воспользоваться соотношением $y'(x)dx = dy(x)$ из курса математического анализа, то уравнение можно переписать в виде

$$dy = f(x,y)dx. \tag{1.7}$$

Наиболее общая форма такого уравнения такова

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{1.8}$$

Смысл этого равенства в том, что оно представляет зависимость между дифференциалом искомой функции dy и дифференциалом независимой переменной dx. Это уравнение называют уравнением в дифференциалах. Формально переход от уравнения, развешенного относительно производной к уравнению в дифференциалах делается заменой y' на «дробь» $\frac{dy}{dx}$ и умножением результата на dx.

Принята терминология:

1. Решение дифференциального уравнения, зависящее от произвольной постоянной $y = y(x, C)$, называется *общим решением* дифференциального уравнения, если разным значениям C при этом соответствуют разные решения.

2. Если уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, полученное в процессе интегрирования дифференциального уравнения, задаёт общее решение неявно, то это равенство называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

3. Всякое решение, соответствующее определённому значению постоянной величины $C = C_0$ в общем решении, называется *частным решением* дифференциального уравнения, а равенство $\Phi(x, y, C_0) = 0$ — частным интегралом.

Обратимся к примеру 1.1. Дифференциальное уравнение (1.1) запишем в виде равенства в дифференциалах

$$\frac{dx}{x} = -0,1\,dt.$$

Интегрируя его на произвольном интервале, получаем

$$\ln|x| = -0,1t + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования. Введём новую постоянную $C_1 = \ln C_2$, $C_2 \in (0, \infty)$ и перепишем равенство в виде

$$x(t) = \pm C_2 e^{-0,1t} = Ce^{-0,1t}, \tag{1.9}$$

где $C = \pm C_2$. Это есть общее решение дифференциального уравнения (1.1). При любом фиксированном значении $C = C_0$ мы получаем частное решение $x(t) = C_0 e^{-0,1t}$ уравнения (1.1). Общее решение представляет некоторое семейство кривых на плоскости xOt (рис. 1), тогда как частное решение представляется конкретной кривой этого семейства, например $C = 1, 2, \ldots$

1.1.3. Частные решения дифференциального уравнения. Задача Коши

Для дифференциального уравнения первого порядка процесс выделения частного решения из общего состоит в выборе одного конкретного значения постоянной величины $C = C_0$. Такой выбор определяет точку плоскости (t_0, x_0), через которую проходит график требуемого решения. Записывается это условие как

$$x\Big|_{t=t_0} = x_0, \quad \text{или} \quad x(t, C)\Big|_{t=t_0} = x_0 \tag{1.10}$$

и читается: «кривая $x = x(t, C)$ проходит через точку (t_0, x_0)».

Задача нахождения частного решения из общего по условию (1.10) называется задачей нахождения частного решения по начальным данным (t_0, x_0), или задачей Коши (в честь известного математика О. Коши) для дифференциального уравнения.

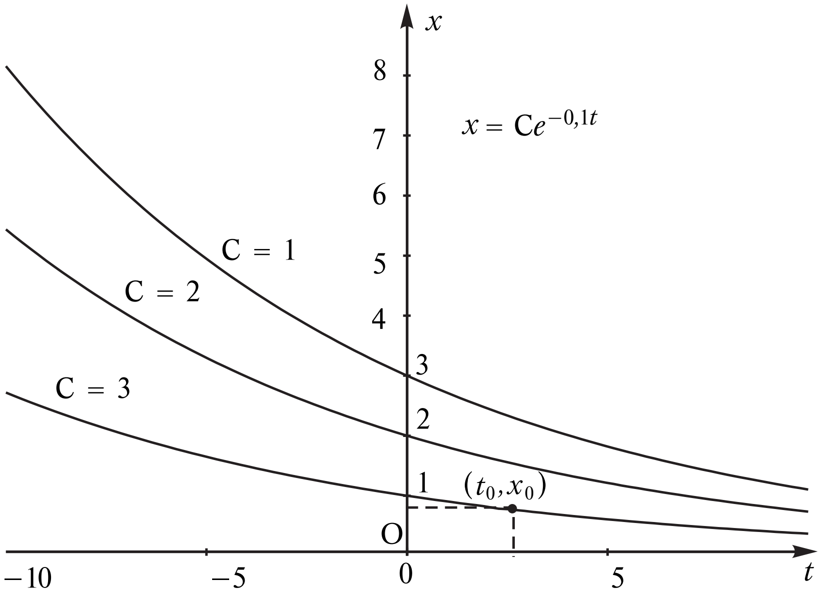

Рис. 1.1.

Решим задачу Коши (1.10) для уравнения (1.1). Применяя условие (1.10) к общему решению (1.9), получим

$$x\Big|_{t=t_0} = Ce^{-0,1t}\Big|_{t=t_0} = Ce^{-0,1t_0} = x_0,$$

откуда находим значение C, соответствующее выбору точки (t_0, x_0),

$$C_0 = x_0 e^{0,1t_0}.$$

Подставляя это значение C_0 в (1.9), получаем частное решение в виде

$$x(t) = x_0 e^{0,1(t-t_0)}.$$

График этого решения представлен на рис. 1.1.

При решении дифференциальных уравнений второго порядка в процессе интегрирования в общем решении получим две произвольные постоянные. Рассмотрим, например, уравнение второго порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \qquad (1.11)$$

из системы (1.3). Интегрируя первый раз, находим

$$\frac{dz}{dt} = -gt + C_1. \qquad (1.12)$$

Интегрируя ещё раз, получим общее решение

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2, \qquad (1.13)$$

зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Здесь для выделения частного решения из общего (решения задачи Коши) требуется поставить два условия, позволяющих найти две постоянные C_1 и C_2. Физически эти условия означают задание начальной высоты z_0 и проекции начальной скорости на ось Oz:

$$z(t)\Big|_{t=t_0} = z_0, \quad \frac{dz}{dt}\Big|_{t=t_0} = v_0.$$

Используя (1.12) и второе условие, находим C_1:

$$\frac{dz}{dt}\Big|_{t=t_0} = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = v_0 + gt_0.$$

Используя (1.13) и первое начальное условие, с учётом найденного значения C_1 получаем C_2:

$$z(t)\Big|_{t=t_0} = -\frac{gt_0^2}{2} + (v_0 + gt_0)t_0 + C_2 = z_0,$$

следовательно,

$$C_2 = z_0 + \frac{gt_0^2}{2} - (v_0 + gt_0)t_0.$$

Для простоты рассмотрим случай $t_0 = 0$, тогда $C_1 = v_0$, $C_2 = z_0$, и частное решение принимает вид

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + z_0.$$

1.1.4. Постановка задачи Коши для уравнения произвольного порядка. Теорема о разрешимости задачи Коши

Интегрирование дифференциального уравнения n-го порядка (1.4) приведёт нас к зависимости общего решения от n постоянных $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Поэтому для уравнения (1.4) задача Коши ставится следующим образом. Требуется найти решение уравнения (1.4), удовлетворяющее n начальным условиям

$$y(x)\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'(x)\Big|_{x=x_0} = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x)\Big|_{x=x_0} = y_{n-1},$$

где $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — постоянные величины — данные Коши, или начальные условия. Возникает вопрос, при каких условиях такая задача разрешима и сколько она имеет решений? Теорему, отвечающую на эти вопросы, сформулируем, простоты ради, для уравнения первого порядка.

Теорема 1.3 (существования и единственности решения задачи Коши). *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна как функция двух переменных в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *плоскости* $x\mathrm{O}y$ *и дифференцируема по переменной* y *в этой окрестности. Тогда для значений* x*, достаточно близких к* x_0*, определено единственное решение задачи Коши*

$$y' = f(x, y), \quad y(x)\Big|_{x=x_0} = y_0.$$