С. В. СУДОПЛАТОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ СЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ

ЧАСТЬ 2

2-е издание, дополненное

НГТУ

НОВОСИБИРСК
2018

Монографии НГТУ

Серия основана в 2004 году

УДК 510.67
С892

Рецензенты:
член-корр. НАН Республики Казахстан,
д-р физ.-мат. наук, проф. *Б. С. Байжанов*,
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. А. Палютин*,
д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Г. Пинус*

Судоплатов С. В.
С892 Классификация счётных моделей полных теорий: монография в 2 ч. / С. В. Судоплатов.– 2-е изд., доп. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – (Серия «Монографии НГТУ»)

ISBN 978-5-7782-3523-6
Ч.2. – 452 с.
ISBN 978-5-7782-3525-0

Книга является второй частью монографии «Классификация счётных моделей полных теорий», состоящей из двух частей. В книге рассмотрены генерические эренфойхтовы теории и реализации предпорядков Рудин–Кейслера в этих теориях; решение проблемы Гончарова–Миллара о существовании эренфойхтовой теории, имеющей счётные, не почти однородные модели; стабильные генерические эренфойхтовы теории (решение проблемы Лахлана); гиперграфы простых моделей и распределения счётных моделей малых теорий, а также распределения счётных моделей теорий с континуальным числом типов.

Для интересующихся математической логикой.

УДК 510.67

ISBN 978-5-7782-3525-0 (Ч.2)
ISBN 978-5-7782-3523-6

S. V. SUDOPLATOV

CLASSIFICATION OF COUNTABLE MODELS OF COMPLETE THEORIES

PART 2

2nd revised edition

NOVOSIBIRSK
2018

УДК 510.67
С892

Reviewers:
Member Corresponding of National Academy of Sciences at Republic of Kazakhstan, Professor B. S. Baizhanov, D.Sc. (Phys. & Math.),
Professor E. A. Palyutin, D.Sc. (Phys. & Math.),
Professor A.G. Pinus, D.Sc. (Phys. & Math.)

Sudoplatov S. V.
С892 Classification of countable models of complete theories: monograph, 2nd revised edition in two parts / S. V. Sudoplatov. – Novosibirsk: NSTU Publisher, 2018. – ("NSTU Monographs" series)

ISBN 978-5-7782-3523-6
Part 2. – 452 p.
ISBN 978-5-7782-3525-0

The book is the second part of the monograph "Classification of countable models of complete theories" consisting of two parts. In the book, generic Ehrenfeucht theories and realizations of Rudin–Keisler preorders are considered as well as a solution of Goncharov–Millar problem on the existence of Ehrenfeucht theories with countable models which are not almost homogeneous, stable Ehrenfeucht theories solving the Lachlan problem, hypergraphs of prime models, distributions of countable models of small theories, and distributions of countable models of theories with continuum many types.

The book is intended for specialists interested in Mathematical Logic.

УДК 510.67

ISBN 978-5-7782-3525-0 (Part 2)
ISBN 978-5-7782-3523-6

Оглавление

Contents

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — продолжение первой части "Классификации счётных моделей полных теорий". Нумерация глав первой и второй частей сквозная. Основной текст (главы 4–7) включает темы, продолжающие темы глав 1–3 первого тома. Библиография второй части включает в себя библиографию первой части и для удобства чтения сохранена нумерация ссылок.

Опишем краткое содержание глав настоящей книги.

В главе 4 на основе синтаксической генерической конструкции и несущественной упорядоченной раскраски бесконтурного орграфа строятся пример и модификации *нестабильного* генерического властного орграфа, имеющего неограниченные длины кратчайших маршрутов и допускающего обогащение до структуры неглавного властного типа (§ 4.1). Затем на основе генерического властного орграфа строятся теории с властными типами (§ 4.2), генерические эренфойхтовы теории с тремя счётными моделями (§ 4.3), а также приводится модификация генерической конструкции, позволяющая реализовать всевозможные характеристики эренфойхтовых теорий по предпорядкам Рудин–Кейслера и функциям распределения числа предельных моделей (§ 4.4). В § 4.5 приводится описание предпорядков Рудин–Кейслера в малых теориях. В § 4.6 доказывается, что теории, имеющие менее континуума счётных моделей, являются разбросанными. Из этого свойства следует теорема Морли [358] о возможных значениях числа счётных моделей теории. В § 4.7 основные характеристики эренфойхтовых теорий распространяются на произвольные малые теории с конечными предпорядками Рудин–Кейслера по модулю гипотезы Воота. В § 4.8 приводится описание распределений однородных моделей малых теорий с конечными предпорядками Рудин–

Кейслера. В § 4.9, написанном на основе работ И. В. Шулепова [142, 143, 144], излагаются результаты о существовании некоторых графов, получаемых факторизациями последовательностей по множествам словарных тождеств. В § 4.10 на основе факторизаций символьных последовательностей даётся положительное решение проблемы Гончарова–Миллара [80, 250, 253, 352, 354] о существовании эренфойхтовых теорий со счётными, не почти однородными моделями. В § 4.11 приводятся модификации генерической конструкции эренфойхтовых теорий, основанные на неплотных структурах властных орграфов, а также на структурах властных типов, не имеющих властных орграфов. Основные результаты главы 4 представлены в работах [125, 129, 140, 422, 424, 425, 442].

Ряд параграфов из главы 4 написан на основе первой главы докторской диссертации автора [23].

В главе 5 на основе генерической конструкции Хрушовского–Хервига с предранговыми функциями в три этапа строятся примеры стабильных генерических властных орграфов. Сначала генерическая конструкция переносится на двудольные орграфы с цветными дугами (§ 5.1), затем, с двудольных цветных орграфов, — на безразвилочные орграфы (§ 5.2), и, наконец, с безразвилочных — на властные орграфы (§ 5.3). В § 5.4 объясняется недостаток упрощённой конструкции эренфойхтовых теорий, которая в силу её особенности помимо нестабильности структуры властного орграфа порождает формульную нестабильность через ти́повую нестабильность. В § 5.5 описываются особенности генерической конструкции, позволяющей строить стабильные эренфойхтовы теории. В §§ 5.6–5.9 на основе стабильных генерических властных орграфов с помощью слияний Хрушовского генерических конструкций властных орграфов с генерическими конструкциями счётного семейства неорграфов строятся искомые стабильные эренфойхтовы теории со всевозможными предпорядками Рудин–Кейслера и функциями распределения числа предельных моделей. Тем самым, в частности, устанавливается существование стабильных эренфойхтовых теорий, что решает проблему Лахлана. Результаты главы 5 изложены в работах [126, 128, 131, 138, 139, 423].

В главе 6 рассматривается семейство гиперграфов простых моделей произвольной малой теории и представляется механизм структурного описания моделей теории по этим семействам. Тем самым обосновывается, в частности, ключевая роль теоретико-графовых конструкций в построении приводимых в книге примеров эренфойхтовых теорий. Кроме того, обобщаются результаты предыдущих глав на класс всех малых теорий Результаты главы 6 содержатся в работах [133, 134, 135, 136, 137].

В главе 7 приведена классификация счётных моделей полных теорий с континуальным числом типов, полученная совместно с Р. А. Попковым [111, 389]. В § 7.1 определяются некоторые основные примеры теорий с континуальным числом типов. В § 7.2 определяются предпорядки Рудин–Кейслера, формулируются некоторые основные свойства и примеры, относящиеся к этим предпорядкам. Понятие предмодельного множества, содержащее основные свойства предпорядков Рудин–Кейслера для типов представлено в § 7.3. В § 7.4 приводится критерий того, что последовательность Рудин–Кейслера для типов образует счётную модель, и определяются распределения счётных моделей относительно этих последовательностей. В § 7.5 определяются три класса: **P**, **L** и **NPL**, простых над кортежами, предельных и остальных счётных моделей соответственно. Описываются возможности для числа моделей в этих классах, предполагая континуум-гипотезу и малость теории. Для класса $\mathcal{T}_c$ счётных теорий с континуальным числом типов доказывается критерий того, что каждая счётная модель проста над некоторым кортежем или предельна. Приводятся некоторые связи между числом счётных моделей в классах **P**, **L** и **NPL**. В § 7.6 определяются операторы, используемые для реализаций возможных распределений счётных моделей. В §§ 7.7, 7.8 описываются распределения простых и предельных моделей для конечных и счётных предпорядков Рудин–Кейслера. В § 7.9 описываются связи между классами **P**, **L** и **NPL**, а также возможные значения для числа счётных моделей в этих классах, в предположении континуум-гипотезы. Некоторые реализации предмодельных множеств приведены в § 7.10.

Основными классификационными теоремами являются следующие: 1.1.4.1, 4.4.0.1, 4.7.0.1, 4.7.0.3, 4.8.0.1, 4.8.0.4, 5.8.0.1, 6.6.0.10, 6.6.0.11, 7.7.0.5, 7.8.0.1, 7.8.0.2, 7.9.0.1, 7.9.0.2.

Глава 4

ГЕНЕРИЧЕСКИЕ ЭРЕНФОЙХТОВЫ ТЕОРИИ И ПРЕДПОРЯДКИ РУДИН–КЕЙСЛЕРА

§ 4.1. Генерические теории с несимметричными отношениями полуизолированности

Приводимое в этом и следующем параграфах построение устанавливает существование властного орграфа $\Gamma_{\rm gen} = \langle X; Q\rangle$ с неограниченными длинами кратчайших маршрутов, который с помощью некоторой несущественной Q-упорядоченной раскраски обогащается до счётной насыщенной системы $\mathcal{M}$ с неглавным властным типом $p_\infty(x) \in S^1(\varnothing)$ таким, что орграф $\left\langle p_\infty(\mathcal{M}); R_Q^{p_\infty}(\mathcal{M})\right\rangle$ изоморфен орграфу $\Gamma_{\rm gen}$, где

$$R_Q^{p_\infty}(\mathcal{M}) = \{(a,b) \in (p_\infty(\mathcal{M}))^2 \mid \mathcal{M} \models Q(a,b)\}.$$

Формула $Q(x,y)$ будет свидетельствовать о том, что отношение ${\rm SI}_{p_\infty}^{\mathcal{M}}$ несимметрично. Орграф $\Gamma_{\rm gen}$ (с неограниченными длинами кратчайших маршрутов) является нетранзитивным. Так как отношение ${\rm SI}_{p_\infty}^{\mathcal{M}}$ транзитивно, орграф с отношением ${\rm SI}_{p_\infty}^{\mathcal{M}}$ не изоморфен орграфу $\Gamma_{\rm gen}$. Вместе с тем, в силу конструкции, мы получим такой изоморфизм для транзитивного замыкания орграфа $\Gamma_{\rm gen}$.

В процессе построения теории с властным типом мы определим раскраску дуг отношения Q, образующую представление отношения Q в виде дизъюнктного объединения некоторых бинарных отношений Q_n, $n \in \omega$. Кроме того, будут вводиться бинарные отношения $P_{i,n}$, $i, n \in \omega$, обеспечивающие связь элементов цвета n с элементами бóльших цветов, включая цвет ∞; симметричные бинарные отношения R_n, $n \in \omega$, связывающие лишь одноцветные элементы и представляющие собой "мостики", регулирующие процессы расширения простых моделей над $p_\infty(x)$ и порождающие заданное число предельных моделей над $p_\infty(x)$; $(n+1)$-местные отношения $R_{\mathbf{A}}$, обеспечивающие сильную взаимореализуемость типа $p_\infty(x)$ и типов $q(\overline{y})$, $l(\overline{y}) = n$, соответствующих типам изоморфизма $\mathbf{A}$ n-элементных структур, представленных некоторыми диаграммами $\Phi(A)$ в строящемся генерирующем классе. Указанные атрибуты будут образовывать сигнатуру генерической теории с тремя счётными моделями, а затем, после некоторого обогащения, и теорий с заданными произвольными конечными предпорядками Рудин–Кейслера и конечнозначными функциями распределения числа предельных моделей по классам эквивалентности относительно $\mathrm{RK}(T)$.

4.1.1. Генерический цветной орграф

Построение орграфа Γ_{gen} будем проводить одновременно с его раскрашиванием. При этом используется описанный в главе 2 синтаксический подход к построению генерических систем.

4.1.1.1. Определение. Пусть $\Gamma_1 = \langle A_1; Q_1\rangle$ — цветной конечный подграф бесконтурного цветного орграфа $\Gamma_2 = \langle A_2; Q_2\rangle$ ($A_1 \subseteq A_2$, $Q_1 = Q_2 \cap (A_1)^2$, $\Sigma(\Gamma_1) = \Sigma(\Gamma_2)$) с раскраской Col: $A_2 \to \omega \cup \{\infty\}$ (как в разделе 1.2.2), $\Sigma(\Gamma_1) = \{Q^{(2)}\} \cup \{\mathrm{Col}_n^{(1)} \mid n \in \omega\} = \Sigma(\Gamma_2)$ и, следовательно, Q_1 и Q_2 — интерпретации предикатного символа Q. Пусть a и b — вершины из A_1; S — (a, b)-маршрут, не лежащий целиком в Γ_1. Маршрут S называется *внешним* (над Γ_1), если лишь концы из S принадлежат A_1.

Для $n \in \omega \setminus \{0,1\}$ определим формулу $\alpha_n(a,b,\overline{a})$ сигнатуры $\{Q\}$, имеющую параметры $\overline{a}$ из A_1 и удовлетворяющую следующему условию: $\Gamma_2 \models \alpha_n(a,b,\overline{a})$ тогда и только тогда, когда некоторый кратчайший (a,b)-маршрут в Γ_2 имеет длину $n \geq 2$ и все кратчайшие (a,b)-маршруты в Γ_2 являются внешними над Γ_1. Формула $\alpha_n(a,b,\overline{a})$ имеет следующий вид:

$$\exists x_0,\ldots,x_n \left((x_0 \approx a) \wedge (x_n \approx b) \wedge \bigwedge_{i<n} Q(x_i,x_{i+1})\right) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{m<n} \neg\exists y_0,\ldots,y_m \left((y_0 \approx a) \wedge (y_m \approx b) \wedge \bigwedge_{i<m} Q(y_i,y_{i+1})\right) \wedge$$

$$\wedge\forall z_0,\ldots,z_n \left(\left((z_0 \approx a) \wedge (z_n \approx b) \wedge \bigwedge_{i<n} Q(z_i,z_{i+1})\right) \rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow \bigwedge_{i\in\{1,\ldots,n-1\},\ c\in A_1} \neg(z_i \approx c)\right).$$

Отметим, что бескванторная диаграмма для графа Γ_1, объединённая с множеством всех формул $(\alpha_n(a,b,\overline{a}))^\delta$, где $\delta \in \{0,1\}$ и $\Gamma_2 \models (\alpha_n(a,b,\overline{a}))^\delta$, также образует диаграмму, которую обозначим через $\Phi(A_1)$. Формулы $\alpha_n(a,b,\overline{a})$ с условием $\Gamma_2 \models \alpha_n(a,b,\overline{a})$ будут кодироваться тройками (a,b,n), определяющими множество $W(\Gamma_1,\Gamma_2)$, позволяющее восстановить диаграмму $\Phi(A_1)$. Таким образом, тройка (a,b,n) помещается в $W(\Gamma_1,\Gamma_2)$ тогда и только тогда, когда некоторый кратчайший (a,b)-маршрут в Γ_2 имеет длину $n \geq 2$ и все кратчайшие (a,b)-маршруты в Γ_2 являются внешними над Γ_1.

Тройка $\langle A_1,Q_1,W\rangle$, где $W = W(\Gamma_1,\Gamma_2)$, называется *c_0-подграфом* орграфа Γ_2. По определению c_0-подграф $\langle A_1,Q_1,W\rangle$ является кодом для диаграммы $\Phi(A_1)$.

Ниже мы будем работать с c_0-подграфами, одновременно и неявно подразумевая работу с соответствующими диаграммами. В дальнейшем также все рассматриваемые графы будут предполагаться с раскрасками вершин. Наличие таких раскрасок будет подразумеваться, но обычно без явного указания на них.

4.1.1.2. Определение. Отношение "быть c_0-подграфом" обозначим через $\subseteq_{c_0}$, т. е. при наличии множества W будем писать $\langle\Gamma_1, W\rangle \subseteq_{c_0} \Gamma_2$. Система $\langle\Gamma_1, W\rangle$ (с раскраской вершин) часто будет рассматриваться самостоятельно, называться *c-графом* и обозначаться также через $\langle A_1, Q_1, W\rangle$. При этом множество A_1 будет называться *носителем* c-графа $\langle A_1, Q_1, W\rangle$.

В дальнейшем c-графы будем обозначать через $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ (возможно, с индексами), их соответствующие носители — через $A, B, \ldots$. При этом пустое множество $\varnothing$ считается носителем c-графа, имеющего вид $\langle\varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$. Если $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ — c-граф, то отношения Q и W обозначаются через $Q_{\mathcal{A}}$ и $W_{\mathcal{A}}$ соответственно.

По определению каждый c-граф $\mathcal{A}$ конечен и содержит *минимальную* информацию, позволяющую восстановить длины кратчайших маршрутов в надграфах, согласованных с тем, что внесено в $W_{\mathcal{A}}$.

Поскольку для c-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ координата W определяется бинарными отношениями W_n, $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$, и, тем самым, $\mathcal{A}$ может быть проинтерпретирован орграфом $\langle A, Q, W_n\rangle_{n\in\omega}$ с раскрашенными вершинами и дугами, то каждый c-граф $\langle A, Q, W\rangle$ представляется в виде конечной системы $\langle A; Q, W_n, \mathrm{Col}_m\rangle_{n\in\omega\setminus\{0,1\}, m\in\omega}$.

Заметим, что как и для c_0-подграфов, при рассмотрении ограничений c-графов у нас нет возможности добавлять в сигнатуру предикатные символы для W_n, а каждое отношение W_n задаётся Q-формулой $\alpha_n(x, y, \overline{a})$ с параметрами $\overline{a}$ из A.

4.1.1.3. Определение. Для c-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ обозначим через $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$ минимальный по включению орграф Γ с некоторым носителем X, удовлетворяющий условию $\mathcal{A} \subseteq_{c_0} \Gamma$

и содержащий для каждой тройки $(a, b, n) \in W$ кратчайший (a, b)-маршрут длины n, все промежуточные элементы которого имеют степень 2 (и при этом, по определению, лежат в $X \setminus A$).

Заметим, что граф $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$, вообще говоря, определяется неоднозначно, однако любые два графа указанного вида, имеющие одноцветные соответствующие новые вершины, изоморфны относительно изоморфизма, фиксирующего все элементы из A. При построении генерической системы все возможные варианты распределения цветов новых вершин будут реализованы. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении свойств, сохраняющихся при изоморфизмах, фиксирующих все элементы из A, вместо класса всех графов вида $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$ будет рассматриваться некоторый его представитель.

4.1.1.4. Определение. Определим отношение $\subseteq_c$ на классе c-графов. Так, c-граф $\mathcal{A} = \langle A, Q_{\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}} \rangle$ называется *c-подграфом* c-графа $\mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}} \rangle$ и используется запись $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$, если $A \subseteq B$, $Q_{\mathcal{A}} = Q_{\mathcal{B}} \cap A^2$ и $W_{\mathcal{A}} = W(\langle A; Q_{\mathcal{A}} \rangle, \mathrm{cc}(\mathcal{B}))$.

Очевидно, что отношение $\subseteq_c$ образует частичный порядок на любом множестве c-графов.

Запись $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{N}$ будет часто использоваться вместо записи $\mathcal{A} \subseteq_{c_0} \mathcal{N}$.

Заметим, что каждый c-граф $\mathcal{B}$ представляется в виде диаграммы $\Phi_c(\mathcal{B})$ сигнатуры $\{Q\} \cup \{\mathrm{Col}_n \mid n \in \omega\}$, состоящей из диаграммы цветного графа $\langle B; Q_{\mathcal{B}} \rangle$, а также из всевозможных формул, описывающих (посредством формул α_n) для каждого подграфа $\langle A; Q_{\mathcal{A}} \rangle$ графа $\mathrm{cc}(\mathcal{B})$ и для любых двух вершин $a, b \in A \cap B$ наличие или отсутствие лишь внешних над A кратчайших (a, b)-маршрутов[1] длины $n \geq 2$ (тройки

[1]Здесь и далее при указании на наличие или отсутствие лишь внешних кратчайших маршрутов будем предполагать, что только внешние маршруты могут быть кратчайшими.

$(a, b, n) \in W_{\mathcal{A}}$ символизируют формулы, описывающие наличие таких маршрутов); при этом в формулах для $\langle A; Q_{\mathcal{A}} \rangle$ не указывается информация о цветах внешних вершин. Согласно определению отношения $\subseteq_c$ условие $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$ равносильно включению $\Phi_c(\mathcal{A}) \subseteq \Phi_c(\mathcal{B})$ при естественном отождествлении констант.

Тем самым, c-графы $\mathcal{A}$ и диаграммы $\Phi_c(\mathcal{A})$ однозначно определяют друг друга, а также взаимосвязь между c-графами определяется взаимосвязью между их диаграммами, и наоборот.

В дальнейшем мы будем работать с c-графами, подразумевая также работу с указанными диаграммами Φ_c.

4.1.1.5. Определение. Обозначим через $\mathbf{K}^*$ класс всех c-графов $\mathcal{A} = \langle A, Q_{\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}} \rangle$ таких, что для любых вершин $a, b \in A$ если $(a, b) \in Q$ или $(a, b, n) \in W$ для некоторого n, то $\mathrm{Col}(a) \leq \mathrm{Col}(b)$.

Заметим, что если $\mathcal{A} \in \mathbf{K}^*$ и существует (a, b)-маршрут в $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$ с концами a и b из $\mathcal{A}$, то $\mathrm{Col}(a) \leq \mathrm{Col}(b)$.

Очевидно, что любой c-подграф c-графа из класса $\mathbf{K}^*$ также является c-графом из класса $\mathbf{K}^*$.

4.1.1.6. Определение. Обозначим через $\mathbf{K}$ класс всех цветных бесконтурных орграфов, у которых каждый c-подграф принадлежит классу $\mathbf{K}^*$.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c_0-подграфы орграфа $\mathcal{N}$ из класса $\mathbf{K}$, то множества $A \cap B$ и $A \cup B$ являются носителями c_0-подграфов орграфа $\mathcal{N}$, которые будем обозначать через $\mathcal{A} \cap_{\mathcal{N}} \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \cup_{\mathcal{N}} \mathcal{B}$ соответственно.

Очевидно, что значение $\mathcal{A} \cap_{\mathcal{N}} \mathcal{B}$ не зависит от выбора орграфа $\mathcal{N}$, а значение $\mathcal{A} \cup_{\mathcal{N}} \mathcal{B}$ может меняться при смене орграфа $\mathcal{N}$. В дальнейшем в вышеуказанных записях мы будем опускать индекс $\cdot_{\mathcal{N}}$, если из контекста будет ясно, о каком орграфе идёт речь.

4.1.1.7. Определение. Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}}\rangle$ и $\mathcal{C} = \langle C, Q_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}}\rangle$ — c-графы, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, то *свободной c-амальгамой* c-графов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над $\mathcal{A}$ (обозначаемой через $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$) называется c-граф $\langle B \cup C, Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{B}} \cup W_{\mathcal{C}}\rangle$.

Очевидно, что свободная c-амальгама $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ существует для любых c-графов $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ с условием $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. При этом c-графы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ являются c-подграфами c-графа $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$.

Если $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$, то c-граф $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathcal{B} \restriction A$.

4.1.1.8. Определение. Разнозначное отображение $f\colon A \to B$ называется *c-вложением* c-графа $\mathcal{A} = \langle A, Q_{\mathcal{A}}, W_{\mathcal{A}}\rangle$ в c-граф $\mathcal{B} = \langle B, Q_{\mathcal{B}}, W_{\mathcal{B}}\rangle$ (обозначается $f\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$), если f — вложение цветного графа $\mathcal{A} = \langle A; Q_{\mathcal{A}}, \mathrm{Col}_n\rangle_{n\in\omega}$ в цветной граф $\mathcal{B} = \langle B; Q_{\mathcal{B}} \mathrm{Col}_n\rangle_{n\in\omega}$ такое, что

$$W_{\mathcal{B}\restriction f(A)} = \{(f(a_1), f(a_2), n) \mid (a_1, a_2, n) \in W_{\mathcal{A}}\}.$$

По определению тождественное отображение $\mathrm{id}_A\colon A \to B$ является c-вложением c-графа $\mathcal{A}$ в c-граф $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$.

4.1.1.9. Определение. Назовём c-графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *c-изоморфными*, если существует c-вложение $f\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ с условием $f(A) = B$. При этом отображение f называется *c-изоморфизмом* между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а c-графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — *c-изоморфными копиями*.

Разнозначное отображение $f\colon A \to N$ называется *c-вложением* c-графа $\mathcal{A}$ в орграф $\mathcal{N}$ (обозначается $f\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{N}$), если f — c-вложение c-графа $\mathcal{A}$ в c_0-подграф $f(\mathcal{A})$ орграфа $\mathcal{N}$, имеющий носитель $f(A)$.

4.1.1.10. Лемма (амальгамационная лемма). Класс $\mathbf{K}^*$ удовлетворяет c-амальгамационному свойству (c-AP), т. е. для любых c-вложений $f_0\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ и $g_0\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{C}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{K}^*$, существует c-граф $\mathcal{D} \in \mathbf{K}^*$ и c-вложения $f_1\colon \mathcal{B} \to_c \mathcal{D}$ и $g_1\colon \mathcal{C} \to_c \mathcal{D}$ такие, что $f_0 \circ f_1 = g_0 \circ g_1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{C}$. Очевидно, что в качестве $\mathcal{D}$ годится c-граф $\mathcal{B} *_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$. $\square$

4.1.1.11. Определение. Обозначим через $\mathbf{K}_0^*$ подкласс класса $\mathbf{K}^*$, порождённый из множества цветных орграфов

$$\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma} = \langle\{0,1,2\}; \{(0,1),(0,2),(1,2)\}\rangle,$$

где $\mathrm{Col}(0) = \alpha$, $\mathrm{Col}(1) = \beta$, $\mathrm{Col}(2) = \gamma$, $\alpha \le \beta \le \gamma$, $\gamma \in \omega \cup \{\infty\}$, следующими операциями:

• операциями взятия c-подграфов, c-изоморфных копий, свободных c-амальгам;

• операцией, позволяющей для любого c-графа $\mathcal{A}$ и любых его пар вершин (a,b), $\mathrm{Col}(a) \le \mathrm{Col}(b)$, не связанных маршрутами в графе $\mathrm{cc}(\mathcal{A})$, добавлять к множеству $W_{\mathcal{A}}$ произвольно выбранные тройки (a,b,m), где m — натуральное число, большее числа $\frac{k(k-1)}{2}$ рёбер в полном k-вершинном графе, $k = |\mathrm{cc}(\mathcal{A})|$,

• обратной операцией, позволяющей удалять произвольные тройки (a,b,m) из множества $W_{\mathcal{A}}$ c-графа $\mathcal{A}$.

Операцию добавления к записям W информации об указанных выше маршрутах назовём операцией *маршрутизации*, а операцию удаления информации об этих маршрутах — операцией *демаршрутизации*.

По определению каждый c-граф $\mathcal{A}$ снабжён некоторой раскраской $\mathrm{Col}\colon A \to \omega \cup \{\infty\}$. Функция $\mathrm{Col}'\colon A \to \omega \cup \{\infty\}$ называется *допустимой перераскраской* c-графа $\mathcal{A}$, если после замены функции Col на функцию Col' образуется c-граф из класса $\mathbf{K}_0^*$. Обозначим через $\mathcal{A}(\mathrm{Col}')$ c-граф, получаемый в результате перераскраски.

4.1.1.12. Лемма. *Если $\mathcal{A}$ — c-граф из класса $\mathbf{K}_0^*$, Col' — его допустимая перераскраска, то c-граф $\mathcal{A}(\mathrm{Col}')$ принадлежит классу $\mathbf{K}_0^*$.*

Доказательство проводится с помощью индукции по числу шагов построения c-графа $\mathcal{A}$ из графов $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}$. Используя эту индукцию, получаем замкнутость относительно допустимых перераскрасок класса c-графов $\mathcal{A} = \langle A, Q, W\rangle$ из $\mathbf{K}_0^*$, у которых любые две вершины связаны маршрутами в cc$(\mathcal{A})$. Заметим также, что из замкнутости класса $\mathbf{K}_0^*$ относительно операций маршрутизации и демаршрутизации следует, что допустимой перераскраске произвольного c-графа $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^*$ соответствует допустимая перераскраска c-графа из класса $\mathbf{K}_0^*$ с тем же множеством вершин A, множеством дуг Q и записью $W' \supseteq W$, согласно которой любые две несмежные вершины связаны некоторым маршрутом.

Для завершения доказательства достаточно показать, что с сохранением принадлежности классу $\mathbf{K}_0^*$ в c-графе $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0^*$ можно произвольным образом перераскрасить одну произвольную вершину с условием неубывания цветов при движении по маршрутам. Зафиксируем произвольную вершину $a \in A$, предназначенную для указанной перераскраски. Обозначим через $\mathcal{B}$ c-подграф c-графа $\mathcal{A}$, состоящий из всех вершин из A, связанных с a дугами или лишь внешними кратчайшими маршрутами. По определению класса $\mathbf{K}_0^*$ этому классу принадлежит как c-граф $\mathcal{B}$ так и некоторый результат маршрутизации $\mathcal{C}$, при которых все вершины из C связаны маршрутами. По замеченному выше вершину $a \in C$ можно перераскрасить в требуемый цвет с сохранением принадлежности результата такой перераскраски $\mathcal{C}'$ классу $\mathbf{K}_0^*$. После демаршрутизации в $\mathcal{C}'$ маршрутных связей, не входящих в $\mathcal{B}$, получаем c-граф $\mathcal{B}'$, также принадлежащий классу $\mathbf{K}_0^*$. Искомая перераскраска вершины a в c-графе $\mathcal{A}$ получается теперь удалением из $\mathcal{A}$ вершины a с последующим взятием свободной амальгамы $\mathcal{A} \upharpoonright (A \setminus \{a\}) *_{\mathcal{A}\upharpoonright(B\setminus\{a\})} \mathcal{B}'$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{K}_0$ класс всех цветных бесконтурных орграфов, у которых каждый конечный подграф образует c-граф из класса $\mathbf{K}_0^*$.

4.1.1.13. Теорема. *Существует счётный цветной насыщенный орграф $\mathcal{M} \in \mathbf{K}_0$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *если $f\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{M}$ и $g\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ — c-вложения и $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^*$, то существует c-вложение $h\colon \mathcal{B} \to_c \mathcal{M}$ такое, что $f = g \circ h$;*

2) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — c-изоморфные c-подграфы орграфа $\mathcal{M}$, то $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$;*

3) *раскраска обеднения* $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ *системы* $\mathcal{M}$ *до графовой сигнатуры* $\Sigma = \{Q\}$ *несущественна и* Q*-упорядочена;*

4) *формула* $Q(x, y)$ *является главной формулой в теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \upharpoonright Q)$*;*

5) *семейство* 1*-типов теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *имеет* si*-ранг* 2.

Доказательство. Систему $\mathcal{M}$ будем строить с помощью амальгамационной леммы посредством объединения c-графов $(\mathcal{A}_n)_{n\in\omega}$, $\mathcal{A}_n \subseteq_c \mathcal{A}_{n+1}$, из класса $\mathbf{K}_0^*$. Заменяя c-графы $\mathcal{A}_n$ диаграммами $\Phi_c(\mathcal{A}_n)$, мы получим $\mathcal{M}$ как генерическую систему относительно множества этих диаграмм.

Мы будем следовать доказательству теоремы 2.5.1.2 применительно к генерирующему классу $(\mathbf{D}_0; \subseteq)$, составленному из диаграмм $\Phi_c(\mathcal{A})$, соответствующих c-графам $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0$, с добавлением формул, описывающих тривиальность самодостаточных замыканий, т. е. $\overline{A} = A$. При этом будет установлено, что класс $(\mathbf{D}_0, \subseteq)$ обладает свойством однородного d-амальгамирования.

С указанной целью потребуем выполнения следующего свойства: для любого c-графа $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{A}_n$ и любого c-графа $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^*$ с условием $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B}$ существует копия $\mathcal{C} \subseteq_c \mathcal{M}$ c-графа $\mathcal{B}$ над $\mathcal{A}$, такая, что $\mathcal{C}$ является c-подграфом орграфа $\mathcal{A}_m$ при некотором $m > n$. Более того, цвета элементов из $C \setminus A$ при взятии графовых копий над A распределяются произвольным допустимым способом, т. е. так, чтобы для любых вершин $a, b \in C$ из существования (a, b)-маршрута следовало неравенство $\mathrm{Col}(a) \leq \mathrm{Col}(b)$. Возможность осуществления всевозможных указанных распределений цветов вытекает из леммы 4.1.1.12.

Из счётности числа требований следует существование счётной системы $\mathcal{M}$, удовлетворяющей всем указанным условиям.

Покажем, что система $\mathcal{M}$ насыщена. Пусть $\mathcal{M}'$ — ω-насыщенная модель теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{M}$, $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{M}'$ и $f\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{A}'$ — c-изоморфизм. Если $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{B}' \subseteq_c \mathcal{M}'$, то из конструкции системы $\mathcal{M}$ следует существование c-изоморфной копии $\mathcal{B}$ c-графа $\mathcal{B}'$ над $\mathcal{A}'$, реализующейся над $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$. Это означает, что существует c-изоморфизм $g\colon \mathcal{B} \to_c \mathcal{B}'$, расширяющий c-изоморфизм f.

Пусть теперь $\mathcal{A} \subseteq_c \mathcal{B} \subseteq_c \mathcal{M}$, X и Y — непересекающиеся множества переменных, биективно соответствующие множествам A и $B \setminus A$, $\varphi_n(X)$ (соответственно $\psi_n(X, Y)$), $n \in \omega$, — формула, описывающая:

а) конечные цвета элементов из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$);

б) отрицания цветов, не превосходящих n, для элементов из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$), имеющих бесконечный цвет;

в) существование и длины кратчайших маршрутов, связывающих элементы из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$);

г) отсутствие связывающих элементы из $\mathcal{A}$ (из $\mathcal{B}$) маршрутов длины, не превосходящей n, если элементы маршрутами не связаны.

Тогда в силу конструкции системы $\mathcal{M}$ справедливо

$$\mathcal{M} \models \forall X\, (\varphi_m(X) \to \exists Y\, \psi_n(X, Y)),$$

где $m \geq n$ и m превосходит число $\frac{k(k-1)}{2}$ рёбер в полном k-вершинном графе, $k = |\mathrm{cc}(\mathcal{B})|$. Значит,

$$\mathcal{M}' \models \forall X\, (\varphi_m(X) \to \exists Y\, \psi_n(X, Y)).$$

Отсюда вытекает, что множество формул $\{\psi_n(A', Y) \mid n \in \omega\}$ локально выполнимо в $\mathcal{M}'$ и, следовательно, выполнимо в $\mathcal{M}'$ в силу ω-насыщенности модели $\mathcal{M}'$. Это означает, что найдётся c-граф $\mathcal{B}' \subseteq_c \mathcal{M}'$, где $\mathcal{A}' \subseteq_c \mathcal{B}'$, и c-изоморфизм $g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, расширяющий c-изоморфизм f.

Из доказанной возможности расширений любых c-изоморфизмов $f\colon \mathcal{A} \to_c \mathcal{A}'$ на основе известного метода перекидки получаем, что система $\mathcal{M}$ с выделенными константами, образующими носитель c-графа $\mathcal{A}$, изоморфна счётной элементарной подсистеме системы $\mathcal{M}'$ с выделенными константами, образующими носитель c-графа $\mathcal{A}'$. Тогда в силу произвольности выбора c-изоморфных c-графов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ и насыщенности системы $\mathcal{M}'$ заключаем, что в системе $\mathcal{M}$ реализуется любой тип над конечным множеством, $\mathcal{M}$ — насыщенная система и теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ мала.

Из возможности расширения c-изоморфизмов c-графов, лежащих в насыщенных системах, также следует, что если $\mathcal{A}$

и $\mathcal{B}$ — c-изоморфные c-подграфы цветного орграфа $\mathcal{M}$, то существует автоморфизм системы $\mathcal{M}$, расширяющий исходный c-изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$.

Поскольку тип любого c-графа из $\mathcal{M}$ определяется формулами, содержащими не более двух свободных переменных и описывающими цвета элементов, а также существование маршрутов между элементами, раскраска орграфа $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ несущественна. Из неубывания номеров цветов при движении по маршрутам следует Q-упорядоченность раскраски.

Если в системе $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ элементы a и b связаны дугой, то тип $\mathrm{tp}(a \,\hat{}\, b)$ определяется формулой $Q(x,y)$ и, следовательно, $Q(x,y)$ — главная формула теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \upharpoonright Q)$.

Пункт 5 вытекает из элиминации кванторов теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ с точностью до формул вида $Q^n(x,y)$, каждая из которых (при подстановках параметров вместо x и ограничениях по цветам для y) имеет si-ранг 1, а также из того, что под меткой каждой формулы $\mathrm{Col}_n(x)$ (задающей полный 1-тип) имеется бесконечно много меток главных формул (относительно $\trianglelefteq$). $\Box$

4.1.1.14. Определение. Теория $T_0 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ цветного орграфа, построенного при доказательстве теоремы 4.1.1.13, называется $\mathbf{K}_0^*$-*генерической теорией*, а её счётная насыщенная модель $\mathcal{M}$ — $\mathbf{K}_0^*$-*генерической системой*.

В силу построения теории T_0 для любой её модели $\mathcal{M}'$ из $\mathcal{M}' \models Q(a,b)$ следует $(a,b) \in \mathrm{IECT}_{\mathcal{M}'}$, т. е. тип $\mathrm{tp}_{x\,\hat{}\,y}(a \,\hat{}\, b)$ определяется формулой $Q(x,y)$, а также цветами элементов a и b. Таким образом, из предложения 1.2.3.3 и теоремы 4.1.1.13 вытекает

4.1.1.15. Следствие. *Отношение полуизолированности* $\mathrm{SI}_{p_\infty(x)}$ *несимметрично.*

Как уже отмечалось, орграф $\Gamma_{\mathrm{gen}} \rightleftharpoons \mathcal{M} \upharpoonright Q$, обладающий неограниченными длинами кратчайших маршрутов, имеет нетранзитивное отношение Q. Тем самым, орграф $\langle p_\infty(\mathcal{M}); \mathrm{SI}^{\mathcal{M}}_{p_\infty} \rangle$ не изоморфен орграфу Γ_{gen}. Вместе с тем, поскольку по теореме 4.1.1.13 все полуизолирующие формулы для типа $p_\infty(x)$ исчерпываются булевыми комбинациями $\varphi(x,y)$ формул $Q^n(x,y)$, где $n \in \omega$ и $\varphi(x,y) \vdash Q^k(x,y)$ для некоторого $k \in \omega$, мы получаем изоморфизм для транзитивного замыкания $\mathrm{TC}(\Gamma_{\mathrm{gen}})$ орграфа Γ_{gen}:

4.1.1.16. Следствие. *Орграфы* $\left\langle p_\infty(\mathcal{M}); \mathrm{SI}^{\mathcal{M}}_{p_\infty} \right\rangle$ *и* $\mathrm{TC}(\Gamma_{\mathrm{gen}})$ *изоморфны.*

В дальнейшем мы установим, что орграф Γ_{gen} обладает и остальными свойствами, указанными в начале настоящего параграфа.

Пусть $\mathcal{A}$ — c-подграф системы $\mathcal{M}$, a, b — элементы из A. Рассмотрим c-граф $\mathcal{B}$, полученный добавлением к c-графу $\mathcal{A}$ элемента c такого, что $\mathrm{Col}(c) \le \min\{\mathrm{Col}(a), \mathrm{Col}(b)\}$, а также добавлением дуг (c,a) и (c,b). Очевидно, что c-граф $\mathcal{B}$ принадлежит классу $\mathbf{K}_0^*$ и его копия расширяет c-граф $\mathcal{A}$ в системе $\mathcal{M}$. Тогда выполняется

$$T_0 \vdash \forall x, y\, (\mathrm{Col}_k(x) \wedge \mathrm{Col}_m(y) \to$$
$$\to \exists^{\ge\omega} z\, (\mathrm{Col}_n(z) \wedge Q(z,x) \wedge Q(z,y)))$$

для любых k, m, n с условием $n \le \min\{k, m\}$. В частности, если a и b — реализации типа $p_\infty(x)$, то найдётся реализация $c \models p_\infty$ такая, что $\models Q(c,a) \wedge Q(c,b)$. Следовательно, орграф $\Gamma_\infty = \left\langle p_\infty(M); R_Q^{p_\infty}(\mathcal{M}) \right\rangle$ обладает свойством попарного пересечения. Транзитивность группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_\infty)$ очевидна. Формула $R_Q^{p_\infty}(x,y)$ является главной в теории $\mathrm{Th}(\Gamma_\infty)$ по теореме 4.1.1.13. Из конструкции теории T_0 вытекает равенство $\mathrm{acl}_{\Gamma_\infty}(\{a\}) = \{a\}$ для любого $a \in p_\infty(\mathcal{M})$. Следовательно, Γ_∞ — властный орграф.

По конструкции орграф Γ_∞ изоморфен орграфу Γ_{gen} и последний также является властным орграфом. Заметим также, что в силу конструкции орграф $\Gamma_{\mathrm{gen}}^{-1} = \langle M; Q^{-1} \rangle$ изоморфен орграфу Γ_{gen}.

Таким образом, справедливо

4.1.1.17. Следствие. *Орграфы* Γ_{gen} *и* $\Gamma_{\mathrm{gen}}^{-1}$ *являются властными.*

В силу конструкции системы $\mathcal{M}$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ найдутся элементы $b_i \in Q(a_i, \mathcal{M})$, $i = 1, \ldots, n$, попарно несравнимые относительно $\bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n$. Из определения класса $\mathbf{K}_0^*$ следует существование элемента $c \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} Q(b_i, \mathcal{M})$ и, значит, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Q^2(a_i, \mathcal{M}) \neq \varnothing$. По теореме компактности, а также в силу бесконтурности орграфа с отношением Q^2 найдётся последовательность $(a_n)_{n\in\omega}$ с условием $\models Q^2(a_i, a_j) \Leftrightarrow i < j$. Отсюда и из бесконтурности орграфа Γ_{gen} вытекает, что формула $\varphi(x, y_1\hat{\ }y_2) \rightleftharpoons Q^2(y_1, x) \wedge Q^2(x, y_2)$ имеет свойство дерева (см. [21]), и на основании критерия простоты (см. следствие 2.8.9 в книге Ф. Вагнера [60]) справедливо

4.1.1.18. Следствие. *Теория T_0 не проста.*

Возникает естественный вопрос об отсутствии свойства строгого порядка теории T_0. В пользу позитивного ответа на него указывает тот факт, что на универсуме нет бесконечных частичных порядков по отношениям Q^n, а в процессе построения генерической системы используются лишь свободные амальгамы[2].

4.1.1.19. Лемма. *Если A и B — конечные множества в модели $\mathcal{N}$ $\mathbf{K}_0^*$-генерической теории T_0, то тип $\mathrm{tp}(B/A)$ изолирован тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^k$-полный граф над $\mathcal{A}$, т. е. любые два различных элемента $a \in B$ и $b \in B \setminus A$ связаны некоторой Q^k-дугой, и каждая вершина из $B \setminus A$, имеющая бесконечный цвет, является концом некоторой Q^k-дуги с началом из A, также имеющим бесконечный цвет.*

Доказательство. Пусть Y — множество переменных, биективное с множеством $B \setminus A$. Если $\mathcal{B}$ — полный $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q^k$-граф

[2] П. Танович в письме автору в мае 2009 г. представил положительный ответ на этот вопрос вместе с усовершенствованной конструкцией насыщенного цветного генерического властного орграфа.

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Судоплатов Сергей Владимирович

КЛАССИФИКАЦИЯ СЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ

Часть 2

Монография

2-е издание, дополненное

В авторской редакции

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Художественный редактор *А.В. Ладыжская*

Подписано в печать 12.04.2018
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная
Уч.-изд. л. 28.25. Печ. л. 28.25
Тираж 3000 экз. (2-й з-д – 51 – 100 экз.)
Изд. № 109. Заказ № 598

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
Тел. (383) 346-31-87
E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20