Московский
педагогический
государственный
университет

О. М. Растопчина

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Москва
2018

**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский педагогический государственный университет»**

**О. М. Растопчина**

# Высшая математика

*Учебное пособие*

МПГУ
Москва • 2018

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
Р245

**Рецензенты:**

**Абдулгалимов Г. Л.**, доктор педагогических наук, профессор кафедры прикладной математики, информатики и информационных технологий ФГБОУ ВО «МПГУ»

**Бугримов А. Л.**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и методики преподавания информатики МГОУ

**Растопчина, Оксана Михайловна.**

Р245 Высшая математика : учебное пособие / О. М. Растопчина. – Москва : МПГУ, 2018. – 150 с.

ISBN 978-5-4263-0594-6

Данное учебное пособие содержит материал по темам учебной программы высшей математики для будущих специалистов биоресурсной отрасли, в каждой из которых приведен теоретический материал, примеры профессионально направленных математических задач и примеров из биологии, экологии, технологических процессов. Показано приложение математических методов к биологии, экологии, технологиям пищевых производств. Даны контрольные вопросы, список рекомендуемой литературы. Приведены схематические опорные конспекты по темам и примерная рабочая программа дисциплины.

Учебное пособие предназначается для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.08 – Водные биоресурсы и аквакультура, 05.03.06 – Экология и природопользование, 19.03.03 – Продукты питания животного происхождения, 06.03.01 – Биология (биоэкология), 44.03.05 – Педагогическое образование (биология и экология), а также может представлять интерес для преподавателей высшей математики.

**УДК 51(075.8)**
**ББК 22.11я73**

**ISBN 978-5-4263-0594-6**

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

В современном мире математика играет большую роль в технических, физических, экологических, биологических и других исследованиях. С помощью математических методов с успехом можно решать множество различных проблем.

Целями обучения высшей математике в вузе с точки зрения конечного результата обучения и компетентностного подхода являются:

- ✓ овладение студентами основными методами исследования и решения математических задач на уровне готовности применять приобретенные знания, как при решении стандартных задач, так и в профессиональной и исследовательской деятельности;
- ✓ развитие математического, алгоритмического и логического мышления студентов на уровне способности к анализу, систематизации, обобщения полученной информации и ее математической обработки;
- ✓ овладение общекультурными, общепрофессиональными, профессиональными компетенциями, которые необходимы для самостоятельной производственной и исследовательской деятельности.

Что касается совокупности целей, направленных на овладение общекультурными, общепрофессиональными и профессиональными компетенциями, выделим следующие группы:

❖ **личностные цели** – направленные на развитие различных качеств личности, ее культуры, мировоззрения, так как «математическая подготовка решает задачу преодоления разрыва между естественнонаучным и гуманитарным компонентами культуры и направлена на всестороннее развитие личности» (по Е. И. Дезе):

- повышение математической культуры и развитие логического мышления студентов и математической логики, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным, социальным, научным проблемам;
- формирование научного мировоззрения, понимания универсальности математических методов исследований;
- овладение навыками самостоятельной учебно-познавательной деятельности, в том числе с использованием современных образовательных и информационных технологий;

- овладение навыками планирования и организации собственной деятельности;
- развитие творческих способностей, формирование мотивации к творческой, исследовательской деятельности;

❖ **профессионально-предметные цели** – направленные на формирование системы математических знаний, умений, навыков, имеющих приложение в дальнейшем обучении, жизнедеятельности и профессиональной деятельности:

- овладение математической терминологией, теоретическими знаниями и практическими математическими методами исследования свойств алгебраических объектов, методами дифференциального и интегрального исчисления; основами статистических методов представления, группировки и обработки результатов исследований;
- понимание взаимосвязи математического аппарата с профессионально-направленными дисциплинами и готовность студентов к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности;
- овладение методами математического описания типовых профессиональных задач и интерпретации полученных результатов;
- понимание ключевой роли математики в научно-техническом прогрессе цивилизации;

❖ **профессионально-исследовательские цели** – направлены на развитие умений и навыков научного исследования, математической обработки результатов технических экспериментов:

- овладение знаниями и методами фундаментальных разделов математики в объеме необходимом для обработки информации и анализа данных в научно-исследовательской и проектной деятельности;
- овладение умениями и навыками научного исследования;
- формирование способности самостоятельно анализа и построения математических моделей явлений и процессов, в том числе с применением информационно-коммуникационных технологий;
- формирование способности применения методов математического моделирования.

Изучение математики помогает в освоении учебного материала профессионально направленных дисциплин и способствует более глубокому пониманию взаимосвязи математического аппарата с дисциплинами специализации.

Данное учебное пособие содержит материал по темам учебной программы дисциплины, в каждой из которых приведен теоретический материал, примеры профессионально направленных математических задач и примеров из биологии, экологии, технологических процессов. Показано приложение математических методов к биологии, экологии, технологиям пищевых производств. Даны контрольные вопросы, список рекомендуемой литературы, схематические опорные конспекты по темам (Приложение А).

Учебное пособие составлено в соответствии с программой учебной (Приложение Б) и может быть использовано для изучения дисциплин «Высшая математика» и «Математика» студентами дневной и заочной форм обучения направлений 35.03.08 «Водные биоресурсы и аквакультура» (Б1.В.ДВ.1), 05.03.06 «Экология и природопользование» (Б1.Б.5), 19.03.03 «Продукты питания животного происхождения» (Б2.Б.1), 06.03.01 «Биология (биоэкология)» (Б1.Б.05.01), 44.03.05 «Педагогическое образование (биология и экология)» (Б1.Б.3.1).

# ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

## Матрицы и действия над ними. Определители

**План**

1. **Определение матрицы и ее виды.**
2. **Действия с матрицами**
3. **Вычисление определителя матрицы.**
4. **Приложение матриц.**

**1. *Определение матрицы и ее виды.***

***Определение.*** Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел (или иных математических объектов), расположенных в $m$ строках и $n$ столбцах. Обозначают матрицы $A$, $B$, $C$, …

Общий вид матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}$ – элемент матрицы $A$, $i$ – номер строки, $j$ – номер столбца, в которых расположен $a_{ij}$. Выражение $m \times n$ называется размерностью матрицы.

Если: $m \neq n$ – матрица $A$ прямоугольная;
$m = n$ – матрица $A$ квадратная и число $n$ – её порядок;
$m = 1$ – матрица $A$ есть матрица-строка;
$n = 1$ – матрица $A$ есть матрица-столбец.

*Квадратная матрица* имеет главную и побочную диагонали. Главную диагональ составляют элементы с одинаковыми индексами:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}.$$

*Единичная матрица* – матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Обозначается чаще всего $E$.

*Ноль-матрица* – матрица любой размерности, все элементы которой нули.

**2. *Действия с матрицами.***

**2.1** *Умножение матрицы на число* $k$ :

произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число $k$ называется матрица $C_{m\times n}$ каждый элемент которой равен произведению числа $k$ на соответствующий элемент матрицы $A$.

$$C = k \cdot A, \text{ тогда } c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \text{ где } i = 1...m, \ j = 1...n.$$

Например (умножение матрицы на число):

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

**2.2** *Сложение (вычитание) матриц*: данная операция определяется только для матриц одинаковой размерности. Суммой (разностью) матриц $A$ и $B$ называется матрица $C$ каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц $A$ и $B$.

$$C = A + B, \text{ тогда } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ где } i = 1..m, \ j = 1...n.$$

Например (сложение матриц), найдем $A+B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & -1+1 \\ 0+2 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2.3** *Умножение матриц*: операция умножения матриц возможна только при согласованности матриц, а именно когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй: $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ – согласованны.

Произведением согласованных матриц $A$ и $B$ называется матрица $C = A\cdot B$, где элемент $c_{ij}$ равен сумме произведений элементов строки $i$ матрицы $A$ на элементы столбца $j$ матрицы $B$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj}.$$

Например (умножение матриц), найдем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$A\cdot B$ – операция невозможна, т.к. матрицы не согласованы.

Найдем $B\cdot C=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot1 & 7\cdot3 & 7\cdot0\\6\cdot1 & 6\cdot3 & 6\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 21 & 0\\6 & 18 & 0\end{pmatrix}$.

Найдем

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0+1\cdot6 & 2\cdot5+1\cdot7\\4\cdot0+3\cdot6 & 4\cdot5+3\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 17\\18 & 41\end{pmatrix}.$$

**3. *Вычисление определителя матрицы.***

Все квадратные матрицы имеют специальную характеристику – определитель.

***Определение.*** Определителем матрицы $A$ называется число или математическое выражение, получаемое из элементов данной матрицы $A$ по определенному правилу.

***Обозначение***: $\Delta,\ \Delta A,\ \det A,\ |A|$.

Пусть $A$ – квадратная матрица $n$-го порядка.

**3.1.** Для $n=1$ $\Delta A=|a_{11}|=a_{11}$.

**3.2.** Для $n=2$ $\Delta A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

**3.3.** Для $n=3$ Вычисление *определителя третьего* порядка можно осуществлять по правилу треугольников или по правилу Сарюсса:

$$\Delta A=\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{matrix}\quad =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{31}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

***Определение.*** Минором $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы $A$ называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из $\Delta A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца.

***Определение.*** Алгебраическим дополнением $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы $A$ называется выражение вида:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

**3.4.** *Правило вычисления определителя любого порядка.*

***Теорема Лапласа.*** Определитель матрицы $A$ $n$-го порядка равен сумме парных произведений элементов любой строки (столбца) на свои алгебраические дополнения: