В. А. Далингер

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ. ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным и естественнонаучным направлениям

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по педагогическому образованию в качестве учебного пособия для студентов педагогических вузов

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21я73
Д15

***Автор*:**

Далингер Виктор Алексеевич — доктор педагогических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, академик РАЕ, заведующий кафедрой математики и методики обучения математике факультета математики, информатики, физики и технологии Омского государственного педагогического университета.

***Рецензенты*:**

Зубков А. Н. — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук;

Липатникова И. Г. — профессор, доктор педагогических наук, заведующая кафедрой начального образования Свердловского областного педагогического колледжа.

Далингер, В. А.

Д15 Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 338 с. — (Серия : Образовательный процесс).

ISBN 978-5-534-05736-2

Данная работа представляет собой практико-ориентированное пособие, в ней рассмотрены как теоретические, так и практические основы обучения учащихся доказательству математических предложений.

Раскрыт категориально-понятийный аппарат, относящийся к понятию «теорема», показаны ее различные виды, общие и частные методы доказательства. Детально описана пропедевтическая работа по подготовке учащихся к доказательству теорем, показана работа учителя по подготовке к уроку, на котором будет доказываться теорема. Рассмотрен вопрос об организации деятельности учащихся по «переоткрытию» формулировки теоремы и поиску способов и методов ее доказательства, описаны различные приемы закрепления теоремы.

Для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов, а также учителей математики средних общеобразовательных школ, гимназий, лицеев.

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21я73

ISBN 978-5-534-05736-2

Оглавление

Предисловие

Данная работа представляет собой практико-ориентированное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов, а также учителей математики средних общеобразовательных школ, гимназий, лицеев.

В пособии рассмотрены как теоретические, так и практические основы обучения учащихся доказательству математических предложений. Раскрыт категориально-понятийный аппарат, относящийся к понятию «теорема», показаны ее различные виды, общие и частные методы доказательства. Детально описана пропедевтическая работа по подготовке учащихся к доказательству теорем, показана работа учителя по подготовке к уроку, на котором будет доказываться теорема. Рассмотрен вопрос об организации деятельности учащихся по «переоткрытию» формулировки теоремы и поиску способов и методов ее доказательства, описаны различные приемы закрепления теоремы.

Автор надеется, что предлагаемая работа в какой-то степени удовлетворит запросы учителей, даст им возможность руководствоваться в своей практике интенсивной методикой.

В результате изучения данного пособия студент должен:

знать

- понятие теоремы, ее основные виды и структурные компоненты;
- частные и общие методы доказательства теорем;
- содержание пропедевтической работы по обучению учащихся доказательству теорем;
- содержание подготовительной работы учителя по доказательству теоремы на уроке;
- содержание работы учителя по отработке формулировки теоремы, ее доказательства и закреплению;

уметь

- формировать у учащихся умения подмечать закономерности;
- воспитывать у учащихся понимание необходимости доказательства;
- обучать учащихся умению выделять условие и заключение в математических утверждениях;
- знакомить учащихся с простыми и сложными высказываниями и значениями их истинности;
- знакомить учащихся с понятием отрицания высказываний и с понятием противоречивых высказываний;

- обучать учащихся умению выделять различные конфигурации на одном и том же чертеже;
- обучать учащихся умению пользоваться контрпримерами;
- обучать учащихся умению выполнять геометрические чертежи и читать их;
- формировать у учащихся умения выводить следствия из заданных условий;
- формировать у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, делать выводы;
- анализировать формулировку теоремы и выяснять ее значение в системе других теорем;
- строить аналитические рассуждения, облегчающие понимание доказательства теоремы;
- определять ведущий метод доказательства, исследовать особенности доказательства;
- исследовать математические ситуации, возникающие при доказательстве;
- проводить поиск других методов и способов доказательства теоремы;
- определять рациональную запись доказательства теоремы на доске и в тетрадях учащихся;
- проводить подбор задач, решение которых облегчит доказательство теоремы;
- проводить подбор задач, закрепляющих доказываемую теорему;
- проводить подбор материала для внеклассной работы, связанной с изученной теоремой;
- проводить работу по усвоению учащимися формулировки теоремы;
- организовывать работу по проведению учебных исследований для самостоятельного открытия учащимися математических фактов;
- проводить работу, обеспечивающую усвоение учащимися доказательства теоремы;
- проводить работу по закреплению учащимися формулировки теоремы и ее доказательства;

владеть

- методами диагностики уровня сформированности у учащихся умения доказывать теоремы;
- приемами, средствами и методами работы с теоремой во внеурочной деятельности.

Введение

Читатель имеет обыкновение при чтении книги пропускать различного рода предисловия и введения, но вряд ли это целесообразно, ибо он упускает возможность установить с автором первоначальный контакт. В данном введении актуализированы те проблемы, которые явно или косвенно связаны с методикой формирования у учащихся умения доказывать теоремы и тем самым даны общие ориентиры для учителя. Пытливый ум, воображение и педагогический опыт читателя помогут ему сделать эти ориентиры базовыми идеями в совершенствовании процесса обучения математике вообще и в обучении учащихся доказательству теорем в частности.

Почему одни ученики довольно легко справляются с решением задач, доказательством теорем, другие назубок знают теорию, но не могут ее применять на практике, третьи проявляют полную беспомощность во всем. И недоумевает учитель: «Бьюсь, бьюсь, стараюсь — и никакого результата». Знакомая ситуация, не правда ли? В чем дело? Неужели только в способностях учеников, слабой базе их знаний или плохих учебных программах и учебниках?

Думается, не только в этом. В значительной степени все зависит от используемой учителем технологии обучения. До настоящего времени школьное обучение нацеливалось главным образом на усвоение знаний, умений и навыков, а не на развитие учащихся. И это явилось следствием традиционного информационно-объяснительного подхода к построению содержания образования, когда большой удельный вес знаний дается в готовом виде учителем без опоры на самостоятельную работу учащихся.

Погоня же за одними знаниями и информацией — экстенсивный путь построения содержания и способов образования; интенсивный путь может быть осуществлен лишь при использовании принципов деятельностного подхода в образовании[1].

Суть деятельностного подхода состоит в том, что он ориентирует не только на усвоение знаний, но и на способы этого усвоения, на образцы мышления и деятельности, на развитие познавательных сил и творческого потенциала ребенка. Решающим звеном деятельностного подхода является собственная активная учебно-познавательная деятельность учащихся.

[1] Концепция общего среднего образования как базового в единой системе непрерывного образования: Проект // Учительская газета. 1988. 23 авг.

Недостаток традиционной системы обучения состоит в том, что учителя реализуют в основном лишь одну функцию знаний — информативную, оставляя в стороне другую, не менее значимую, — развивающую. Эти две функции тесно взаимосвязаны, но они не тождественны. Как отмечает И. С. Якиманская, «образованность», т.е. научная информированность, и «развитость мышления» — далеко не одно и то же[1].

Реализация развивающей функции обучения требует от учителя не простого изложения знаний в определенной системе, а предполагает посредством знаний учить школьников мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Учащихся надо целенаправленно учить познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом.

С. Л. Рубинштейн отмечал, что процесс накопления знаний и умений следует рассматривать как учение, а процесс приобретения способностей — как развитие[2]. Степень развитости ученика измеряется и оценивается его способностью самостоятельно приобретать новые знания, способностью использовать в учебной и практической деятельности уже полученные знания. Вот почему целью общего среднего образования как базового в единой системе непрерывного образования является воспитание у учащихся активности и учебной самостоятельности. Обучение не может считаться правильно ориентированным и не может протекать успешно, если не осуществляется вооружение школьников системой умений и навыков учебного труда, помогающей в овладении знаниями, умениями, навыками и культурой мышления. Уместно в связи с этим привести слова французского философа М. Монтеня: «Мозг хорошо устроенный стоит больше, чем мозг хорошо наполненный».

Сегодня настала потребность иметь в школе два журнала: один, который хорошо знаком учителю и ученику, — журнал учета успеваемости, и другой — журнал учета овладения учеником общеучебными умениями и навыками (умение работать с учебником, умение выделять главное, умение анализировать, синтезировать, обобщать, систематизировать, абстрагировать и т.д.).

Такое положение потребует от учителя вести работу по вооружению школьников учебно-познавательным аппаратом не попутно с формированием предметных знаний, а явно, сделав эту работу компонентом каждого урока.

Сейчас в школе обучение в значительной степени строится по формуле «Усвоение = Понимание + Запоминание», в основу же должна быть положена следующая формула: «Овладение = Усвоение + Применение знаний на практике», которая в полном объеме реализуется в процессе восприятия, осмысления, запоминания, применения, обобщения и систематизации.

---

[1] *Якиманская И. С.* Знания и мышление школьника. М. : Знание, 1985. С. 18.

[2] *Рубинштейн С. Л.* Проблемы общей психологии. М. : Педагогика, 1957. С. 221.

В педагогической литературе различают меру и характер обученности. И. Я. Лернер пишет: «Мера обученности обусловлена объемом усвоенного школьником содержания образования; характер обученности определяется видом усвоенного содержания образования»[1].

Как уже отмечалось, в настоящее время акцент в учебном процессе сделан на меру обученности. Об этом свидетельствуют и огромное число дисциплин в школе, и чрезмерно перегруженные программы школьных курсов, и используемые учителем технологии обучения, в основном ориентированные на передачу учащимся готовой учебной информации. Логика научного открытия изучаемого материала, процесс получения знаний в таком случае остаются часто скрытыми от учащихся, и они видят их как результат обработки авторами учебника или учителем.

Нельзя сказать, чтобы сформулированные в школьной программе цели обучения математике определены неправильно. Каждая из них сама по себе в отдельности вполне разумна и правомерна. Но недостаток состоит в том, что, взятые вместе, они образуют только некоторый эклектический конгломерат, в котором не ясна внутренняя связь между отдельными целями и способами их достижения. Получается так, что знания накапливаются как-то сами по себе, умения и навыки формируются попутно с накапливаемыми знаниями, а параллельно этому идут процессы развития мышления и способностей учащихся.

Итак, как ни старо, но обучение школьников доказательству теорем упирается во все те же пресловутые «вооружение учащихся умениями и навыками умственного труда», «развитие самостоятельности мышления», «развивающие функции обучения» и т.п. Как же «оживить» эти термины? Ответ на этот вопрос предполагает реализацию в процессе обучения деятельностного подхода.

С позиций всего вышесказанного мы и будем трактовать вопросы, относящиеся к методике обучения учащихся умению доказывать теоремы. Заметим, что успех в обучении учащихся доказательству теорем определяется не применением одного какого-нибудь приема или метода, а системой преподавания в целом.

Структурной единицей учебно-познавательной деятельности является умение доказывать. Ведущая функция этого умения обусловливается тем, что в любом учебном предмете доказательство выступает в качестве метода исследования тех элементов знаний, которые составляют его содержание.

Основными целями обучения школьников доказательству в курсе математики являются:

- обеспечение усвоения учащимися теоретических знаний по курсу математики;
- выработка у учащихся представления о математике как о дедуктивной науке;

[1] *Лернер И. Я.* Дидактические основы методов обучения. М. : Педагогика, 1981. С. 38.

- обеспечение осознанности, глубины и устойчивости знаний;
- развитие мыслительной деятельности учащихся.

Ведущей функцией обучения учащихся доказательству должна быть развивающая, а не информационная. Изучение теорем в школе имеет своей целью сообщение школьникам не только некоторых геометрических результатов, но и методов, с помощью которых эти результаты получаются. Уместно в связи с этим напомнить слова А. Дистервега: «Плохой учитель преподносит истину, хороший — учит ее находить».

Школьная практика показывает, что в работе учителей преобладает тенденция учить ученика конкретному доказательству тех или иных теорем, но слабо ведется работа по вооружению школьников умениями вообще доказывать. По этому поводу А. К. Артемов пишет, что «многие школьники вместо обобщенных умений нередко овладевают лишь частными умениями, относящимися к доказательству отдельных теорем, наблюдается “разучивание теорем”»[1].

Доказательство каждой новой теоремы обычно рассматривается как отдельно взятый факт, добавляющий к знаниям учащихся еще один элемент знаний. На усвоение школьниками этого нового факта и направлены все усилия учителя. Следует же особо обращать внимание школьников на приемы, которые используются при доказательстве теорем, на приемы поиска этого доказательства. При таком подходе доказательство каждой новой теоремы будет служить не только объектом усвоения, но и средством для формирования общих приемов доказательства теорем. Разница между способным учеником и слабоуспевающим состоит не в том, что первый больше знает, а именно в том, что он владеет более богатым арсеналом различных приемов получения знаний, знает приемы и способы их использования.

В отличие от А. А. Столяра, который под обучением доказательствам понимает «обучение мыслительным процессам поиска, открытия, построения доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств»[2] мы будем под обучением доказательствам понимать как обучение школьников готовым доказательствам (они предложены либо учителем, либо учебником), так и обучение учащихся самостоятельному поиску доказательств.

Исследования, проведенные З. И. Слепкань[3], показали, что проблему обучения доказательствам целесообразно расчленить на несколько последовательно решаемых дидактических задач:

---

[1] *Артемов А. К.* Состав и методика формирования геометрических умений школьников : ученые записи Саратовского государственного университета. Саратов, 1969. С. 224.

[2] *Столяр А. А.* Педагогика математики. 2-е изд. Минск : Вышэйшая школа, 1974. С. 145.

[3] *Слепкань З. И.* Методическая система реализации развивающей функции обучения математике в средней школе : дис. … д-ра пед. наук. М. : Изд-во НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1987; *Она же.* Психолого-педагогические основы обучения математике : метод. пособие. Киев : Рядянська школа, 1983.

1) изучение готовых доказательств, умение воспроизводить их;

2) самостоятельное построение доказательства по образцу с изученным;

3) поиск и изложение доказательств указанным учителем методом или способом;

4) самостоятельный поиск и изложение учащимися доказательств математических утверждений.

Анализ школьной практики показывает, что знания учащихся, связанные с изучением теорем, умения применять их к решению задач, находятся не на должном уровне.

Можно указать три основные причины низкого уровня сформированности у учащихся умения доказывать теоремы:

1) связанные с психическими факторами (ослабление психических функций: внимания, памяти, мышления и т.д.);

2) вытекающие из недостатков программ, учебников и учебных пособий по математике;

3) обусловленные несовершенством организации процесса обучения.

Основная причина состоит в том, что при обучении доказательству теорем учебно-познавательная деятельность учащихся направляется учителем главным образом на понимание и запоминание, в ущерб ознакомлению школьников с методами и способами рассуждений, лежащих в основе поиска доказательства. Учителем не стимулируется постоянный анализ обучающимися своей деятельности при доказательстве теорем, в результате чего эта деятельность ими не осознается.

При доказательстве теорем учителя организуют лишь синтетическую деятельность учащихся, в результате которой они идут по плану доказательства, предложенного учебником. Если бы учебная деятельность школьников при доказательстве теорем была бы аналитико-синтетической, то была бы обеспечена сознательность в осуществлении плана доказательства.

Учителю следует хорошо знать, что не единым доказательством ценно изучение теорем, так как «значение имеет сама творческая деятельность, а не то, что она сотворила»[1].

Анализ школьной практики показывает, что учителя при обучении учащихся доказательству теорем не ставят перед ними цели осознания способа, каким было получено доказательство, а сами в основном показывают готовые доказательства, хотя умение доказывать не находится в прямой зависимости от числа доказанных теорем.

Причины низкого уровня сформированности у учащихся умения доказывать состоят также в увлечении учителем на уроке процедурой оформления доказательства, а не процессом его получения; в недостаточной работе по обеспечению переноса приема доказательства

---

[1] *Крыговская А. С.* Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии // Математика в школе. 1966. № 6. С. 20.

с одних теорем на другие, сходные с ними по содержанию и методам доказательства; в отсутствии работы по формированию у школьников навыков контроля и самоконтроля.

При формировании у учащихся умения доказывать учителями не в достаточной мере учитываются возрастные и индивидуальные особенности, хотя в педагогической литературе отмечается, что «если подростковый возраст считают возрастом усвоения доказательств, то юношеский возраст — это возраст, когда создаются доказательства. В связи с этим у старшеклассников заметно возрастает критическое отношение к предлагаемым доказательствам и стремление к обоснованию своих собственных доказательств. С этим связано и то, что в мышлении юноши, наряду с категорическими суждениями, большое место занимают суждения гипотетические»[1].

Основными направлениями в работе с учащимися по формированию у них умения доказывать могут быть следующие.

1. Показывать учащимся роль и значение доказательства в открытии новых знаний и в усвоении учебного материала курса математики.

2. Разъяснять школьникам, в чем состоит сущность доказательства как процесса утверждения или опровержения истинности мыслей.

3. Проводить целенаправленную работу по обучению учащихся использованию индуктивных и дедуктивных методов (формировать умение находить общее в отдельных частных примерах; воспитывать у учащихся критическое отношение к индуктивному заключению; формировать умение отличать индуктивные умозаключения от дедуктивных).

4. Планомерно формировать у учащихся умения выводить логические следствия из посылок, приучать школьников логически верно оформлять свои рассуждения.

5. Формировать у учащихся познавательные действия, необходимые для доказательства, и учить применять их в нужных ситуациях.

6. Учить школьников обобщать познавательные действия, которые выполняются в ходе доказательства. Как показали исследования ученых (Э. И. Айвазян, М. М. Бурда, З. И. Слепкань, А. А. Столяр и другие), умения учащихся доказывать теоремы следует рассматривать как определенные умственные действия трех видов: ориентировочные, исполнительные, контрольно-корректировочные.

К *ориентировочным действиям* относятся:

- распознавание понятий, входящих в условие теоремы;
- владение алгоритмами доказательств вспомогательных утверждений;
- система указаний по осуществлению анализа состава доказываемого утверждения;
- система указаний по отысканию планов доказательств;

---

[1] *Гаткевич Д. И.* О мышлении старшеклассника // Вопросы психологии познавательной деятельности. М., 1974. С. 55.

- система указаний по применению конкретных методов доказательств;
- обучающие алгоритмы построения планов доказательств определенных групп утверждений.

К *исполнительным действиям* относятся:

- действия выведения следствий и выбор следствий, достаточных для доказательства;
- действия подведения геометрических фигур под понятия.

Контрольно-корректировочные действия включают в себя:

- контроль и коррекцию состава условия доказываемого утверждения;
- контроль и коррекцию логических этапов доказательства;
- контроль и коррекцию полученного результата.

Итак, задачи поставлены, намечены основные пути их решения, перейдем к систематическому анализу поднятой проблемы.

Глава 1
Теорема, ее виды и методы доказательства

1.1. Понятие теоремы

Структуру отдельных мыслей и способы их сочетаний называют *формами мышления*. С точки зрения формальной логики мышление характеризуется тремя основными формами: *понятиями*, *суждениями*, *умозаключениями*.

Пример 1.1. Примеры форм мышления.

Примеры понятий.

1. Треугольник — это фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой.

2. Арифметическим квадратным корнем из числа Q называется неотрицательное число, квадрат которого равен Q.

Примеры суждений.

1. Каждая прямая разделяет плоскость на две полуплоскости; любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от этой прямой, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от нее.

2. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Примеры умозаключений.

1. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.

2. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Следует заметить, что на вопрос «Чем являются те или иные утверждения: теоремами, аксиомами или определениями?» нельзя ответить однозначно вне контекста какого-нибудь курса математики. Так, например, утверждение «Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой» в одном курсе геометрии может быть аксиомой, в другом — теоремой. Возможен, например, вариант, когда в каком-либо курсе геометрии за аксиому принято утверждение, называемое в нашем школьном курсе геометрии теоремой Пифагора.

Перейдем к рассмотрению понятия теоремы, ее структуры и видам теорем.

Математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства, называют теоремой.

Название «теорема» происходит от греческого слова τεορεμα — представление, зрелище (так как в древности часто теоремы доказывались публично, на площадях, и они носили характер спора, диспута).

В школьном курсе математики для словесной формулировки теоремы используются три формы суждения: *категорическая*, *условная*, *разделительная*.

Пример 1.2. Примеры форм суждения.

Примеры категорического суждения.

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(cf(x))' = cf'(x)$.

Примеры условного суждения.

1. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.

2. Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке, то на этом промежутке $F(x) = C$, где C — постоянная.

Примеры разделительного суждения.

1. Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

2. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Теоремы категорической и разделительной формы можно переформулировать в терминах «если ..., то ...», т.е. обратить их формулировку в условную. Пусть, например, дана теорема: «В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны». В условной форме формулировка этой теоремы будет выглядеть так: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны».

Заметим, что разбор структуры теоремы более доступен для учащихся в том случае, когда она сформулирована в условной форме.

Условная форма теоремы может быть эффективно использована и для того, чтобы дать ответ на вопрос: «О свойстве или о признаке идет речь в теореме?»

На этот вопрос легко ответить, если теорему сформулировать в условной форме. Если окажется, что рассматриваемое понятие находится в условии теоремы, то теорема выражает свойство этого понятия, если же понятие находится в заключении теоремы, то она выражает признак. Покажем это на примерах теорем.

Пример 1.3. Примеры теорем.

1. *Теорема Пифагора*: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов». Переформулировав теорему из категорической формы в условную, будем иметь: «Если треугольник прямоугольный, то квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов». Поскольку понятие «прямоугольный треугольник» находится в условии теоремы, теорема выражает собой свойство этого понятия.

2. *Теорема*: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Сформулируем теорему в терминах «если ..., то ...». Будем иметь: «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны». Поскольку понятие «равнобедренный треугольник» находится в условии, то эта теорема выражает свойство объекта.

3. *Теорема*: «Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны». Понятие «параллельные прямые» находится в заключении теоремы, а значит, это теорема-признак.

4. *Теорема*: «Если два угла треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны». Это теорема-признак, ибо понятие «подобные треугольники» находится в заключении теоремы.

Рассмотрим в связи с этим следующую теорему.

Теорема 1.1. Если трапеция равнобокая, то:

1) углы при одном и том же основании равны;

2) высоты, проведенные из концов одного основания на второе основание, равны;

3) перпендикуляр, опущенный из точки пересечения продолжения боковых сторон на основания, делит основания трапеции пополам.

Сформулируем предложения, обратные к данным свойствам:

1°) если в трапеции углы при одном и том же основании равны, то она является равнобокой;

2°) если в трапеции высоты равны, то она является равнобокой;

3°) если в трапеции перпендикуляр, опущенный из точки пересечения продолжений боковых сторон на основания, делит их пополам, то она является равнобокой.

Если сопоставить умозаключения 1—3 и 1°—3°, то можно заметить, что по свойствам понятия можно судить о его признаках. Для этого поступают следующим образом. Чтобы из свойства понятия получить признак этого понятия, надо построить предложение, обратное свойству, и проверить его истинность. Если полученное предложение ложно, то оно не может являться признаком. Так, в нашем примере умозаключения 1° и 3° являются признаками равнобедренной трапеции, а умозаключение 2° признаком не является.

В школьном курсе математики формулируются и доказываются теоремы, имеющие различный вид: в одних теоремах из одного условия вытекает одно заключение, в других из одного условия вытекает несколько заключений, в третьих из нескольких условий вытекает одно заключение и т.д.

Но в любом случае теорема состоит из трех частей:

1) *разъяснительная часть*, в которой описывается множество M объектов, о которых идет речь в этой теореме;

2) *условие теоремы*, т.е. некоторый предикат $A(x)$, заданный на множестве M;

3) *заключение теоремы* — некоторый предикат $B(x)$, заданный на том же множестве M.

В символах математической логики теорема может быть записана следующим образом:

$$(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Здесь:
- $\forall x \in M$ — разъяснительная часть теоремы;
- $A(x)$ — условие теоремы;
- $B(x)$ — заключение теоремы.

Абсолютное большинство теорем (≈60%) в школьном курсе геометрии могут быть записаны таким образом.

Часто в литературе используется такая терминология:
- *тезис* — доказываемое утверждение;
- *аргументы* (основания доказательства) — используемые в доказательстве уже известные утверждения, из которых необходимо следует истинность доказываемого тезиса;
- *демонстрация* — последовательность расположения аргументов и выводов, образующих цепь умозаключений.

При доказательстве тезис должен удовлетворять следующим требованиям: быть ясным и точно определенным; оставаться тождественным, т.е. одним и тем же на протяжении всего доказательства; не должен содержать в себе логического противоречия; не должен находиться в логическом противоречии с суждениями по данному вопросу, высказанными ранее; определять собой ход доказательства так, чтобы то, что в результате будет доказано, было бы именно тем, что требовалось доказать.

Требования к аргументам доказательства таковы: они должны быть истинными предложениями данной теории; быть достаточным основанием для доказываемого предложения; быть предложением, истинность которого доказана самостоятельно, независимо от доказываемого предложения; из совокупности суждений, составляющих аргументы, с необходимостью должна следовать истинность тезисов.

Разберем структуру на примере теоремы из курса геометрии 8-го класса[1].

Теорема 1.2. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Данную теорему после выбора обозначений можно записать в такой форме:

$$(\forall\ \Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1)\ (\angle A = \angle A_1) \Rightarrow \left(\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}\right).$$

Разъяснительная часть теоремы выделяется из условия и заключения теоремы путем установления природы объектов и их множеств,

[1] Геометрия : учебник для 7—9 классов средней школы / Л. С. Атанасян [и др.]. М. : Просвещение, 1990.

на которых рассматриваются условие и заключение, и в данном случае она состоит в том, что рассматриваются любые пары треугольников. $\angle A = \angle A_1$ — условие теоремы, $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ — заключение теоремы.

С другими формализованными структурами теорем, читатель может ознакомиться в работе В. Г. Болтянского[1]. Разговор о различных видах теорем читатель найдет на страницах методической литературы[2]. Здесь же мы лишь коротко остановимся на этом вопросе.

Предикаты $A(x)$ и $B(x)$, входящие в теорему, могут иметь сложную структуру, и отсюда возникают теоремы различной логической конструкции. Приведем пример: «В ромбе диагонали перпендикулярны друг другу и делят углы при вершинах ромба пополам». Эта теорема символически может быть записана так $(\forall x \in M)$ $(A(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$, где M — множество четырехугольников; $A(x)$ — предикат «четырехугольник x является ромбом»; $B_1(x)$ — предикат «в четырехугольнике x диагонали перпендикулярны»; $B_2(x)$ — предикат «в четырехугольнике x диагонали делят углы при вершинах пополам».

Рассмотрим некоторые другие формы теорем кроме вида $(\forall x \in M)$ $(A(x) \Rightarrow B(x))$.

Пример 1.4. Некоторые формы теорем.

1. $(\forall a, b)$ $(a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$.

Знак $\forall$ показывает, что это соотношение является тождеством. Эта теорема имеет следующую форму: $(\forall a, b)$ $A(a, b)$ ($A(a, b)$ — некоторый предикат, записанный в виде равенства).

2. Теорема существования может быть записана в такой форме: $(\forall x \in M)$ $(\exists y)$ $A(x, y)$.

Примерами теорем существования могут служить следующие теоремы из школьного курса геометрии 7—11 классов.

Пример 1.5. Теоремы существования.

1. Через любую точку проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

2. Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

---

[1] *Болтянский В. Г.* Как устроена теорема? // Математика в школе. 1973. № 1. С. 41—49.

[2] Методика обучения математике с использованием системы учебного оборудования : пособие для учителей и студентов педагогических институтов // Е. В. Арутюнян [и др.]. М. : Изд-во АПН СССР, 1984; Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. институтов / сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. М. : Просвещение, 1985; Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов физ-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян [и др.]. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1980.

Можно еще указать такие формализованные структуры теорем:

1) $(\forall x \in M)\ (A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B(x))$;

2) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$;

3) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B_1(x) \vee B_2(x))$;

4) $(\forall x \in M)\ (A_1(x) \vee A_2(x) \Rightarrow B(x))$;

5) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow (C(x) \Rightarrow D(x)))$ — теорема эквивалентна теореме 1;

6) $(\forall x \in M)\ ((C(x) \Rightarrow D(x)) \Rightarrow B(x))$ — теорема эквивалентна теореме 4;

7) $(\forall x \in M)\ (\exists y\ A(x, y) \Rightarrow B(x, y))$;

8) $(\forall x \in M)\ (\exists! y\ (A(x, y) \Rightarrow B(x, y))$ — теорема существования и единственности.

С любой теоремой связаны еще три теоремы. Приведем все четыре вида теорем:

1) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$ — прямая теорема;

2) $(\forall x \in M)\ (B(x) \Rightarrow A(x))$ — обратная теорема;

3) $(\forall x \in M)\ (\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)})$ — противоположная теорема;

4) $(\forall x \in M)\ (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)})$ — обратная к противоположной (контрапозитивная).

Рассмотрим все четыре вида теорем на примерах.

Пример 1.6. Четыре вида теоремы.

1.1. Если четырехугольник параллелограмм, то диагонали его, пересекаясь, делятся пополам (истинно).

1.2. Если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм (истинно).

1.3. Если четырехугольник не параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, не делятся пополам (истинно).

1.4. Если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, не делятся пополам, то такой четырехугольник — не параллелограмм (истинно).

2.1. Если углы вертикальные, то они равны (истинно).

2.2. Если углы равны, то они вертикальные (ложно).

2.3. Если углы не вертикальные, то они не равны (ложно).

2.4. Если углы не равны, то они не вертикальные (истинно).

Между прямой, обратной, противоположной и контрапозитивной теоремами существует тесная связь, которую символически можно выразить так, как представлено на рис. 1.1.

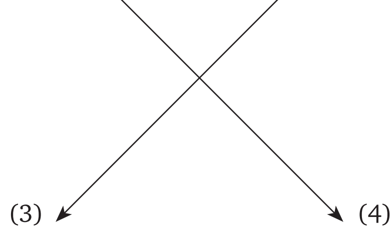

Рис. 1.1

Прямая и обратная к противоположной теореме эквивалентны, т.е. они одновременно истинны или ложны.

Обратная теорема и противоположная теорема эквивалентны, т.е. они одновременно истинны или ложны.

Такая связь между теоремами показывает нецелесообразность изучения всех четырех теорем; достаточно установить истинность или ложность одной какой-либо логически неравносильной пары теорем (1 и 2 или 3 и 4), так как истинность или ложность одной такой пары влечет за собой истинность или ложность другой пары теорем. В связи с этим в любом курсе математики встречаются лишь прямая и обратная теоремы.

Обращаем внимание читателя на тот факт, что если прямая и обратная теорема верны, то можно эти две теоремы записать в виде одной, употребляя такие словосочетания: «тогда и только тогда» или «в том и только в том случае».

Приведем примеры.

Пример 1.7. Прямая и обратная теоремы.

Прямая теорема: «Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны» — теорема верна.

Обратная теорема: «Если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны» — теорема верна.

Эти две теоремы можно сформулировать в одной из следующих форм:

а) две прямые параллельны тогда и только тогда, когда накрест лежащие углы равны;

б) накрест лежащие углы равны тогда и только тогда, когда прямые параллельны;

в) две прямые параллельны в том и только в том случае, если накрест лежащие углы равны;

г) накрест лежащие углы равны в том и только в том случае, если прямые параллельны.

В качестве примера может служить теорема Пифагора, которая в некоторых курсах геометрии формулируется так: «Сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный». В этой формулировке содержится по существу две теоремы:

а) если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его катетов равна квадрату гипотенузы;

б) если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный.

Заметим, что если условие прямой теоремы сложное (состоит из нескольких частных условий), то можно сформулировать для данной теоремы несколько обратных. В общем виде это выглядит так. Если прямая теорема имеет, например, вид «Если A и B, и C, то D», то обратными ей являются такие теоремы:

- если D, то A и B, и C;
- если A и D, то B и C;

- если B и D, то A и C;
- если D и B, и C, то A;
- если A и D, и C, то B;
- и т.д.

Приведем пример.

Пример 1.8. Обратные теоремы.

Рассмотрим такую прямую теорему: «Если треугольник *ABC* равнобедренный и *BD* — его медиана, то она является и высотой».

Обратными к этой теореме будут, например, такие теоремы:

1) если треугольник *ABC* равнобедренный и *BD* — его высота, то она является и медианой;

2) если в треугольнике *ABC* отрезок *BD* является высотой и медианой, то этот треугольник равнобедренный.

1.2. Методы доказательства теорем

Как мы уже отмечали выше, структура доказательства как логическая конструкция состоит из таких элементов: тезис, аргументы, демонстрация.

В демонстрации отражается характер логических связей между тезисом и аргументами. В зависимости от вида демонстрации в методической литературе часто употребляются термины «способ доказательства» и «метод доказательства». Покажем, в чем состоит их различие.

Если доказательство утверждения отличается от другого доказательства того же самого утверждения не логической основой, а последовательностью умозаключений, то будем говорить, что утверждение доказывается двумя *различными способами*, если же одно доказательство отличается от другого логической основой, то будем говорить о *различных методах доказательства*.

Покажем отличие метода от способа доказательства (или решения) на задачах, приведенных ниже.

Задача 1.1[1]**.** На рис. 1.2 $KM \perp LN$, $\angle POM + \angle LOR = 75°$ и $\angle KOR = 58°$. Вычислить $\angle POM$ и $\angle LOP$.

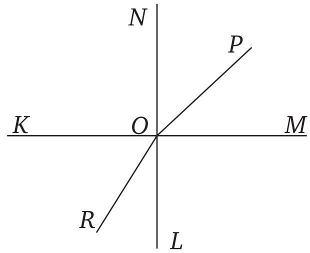

Рис. 1.2

[1] *Нурк Э. Р., Тельгмаа А. Э.* Математика : учебник для 6 класса средней школы. 2-е изд. М. : Просвещение, 1991. Задача № 792.

Дано: $KM \perp LN$, $\angle POM + \angle LOR = 75°$, $\angle KOR = 58°$.

Найти: $\angle POM$ и $\angle LOP$.

Решение

Способ 1:

1) $\angle ROL = 90° - \angle KOR = 90° - 58° = 32°$;
2) $\angle POM = 75° - \angle ROL = 75° - 32° = 43°$;
3) $\angle POL = \angle LOM + \angle MOP = 90° + 43° = 133°$.

Способ 2:

1) $\angle ROL = 90° - 58° = 32°$;
2) $\angle POM = 75° - 32° = 43°$;
3) $\angle NOP = 90° - 43° = 47°$;
4) $\angle POL = 180° - \angle NOP = 180° - 43° = 133°$.

Способ 3:

1) $\angle NOP = 360° - 90° - 90° - 58° - 75° = 47°$;
2) $\angle POL = 180° - \angle NOP = 180° - 47° = 133°$;
3) $\angle POM = 90° - \angle NOP = 90° - 47° = 43°$.

Как мы видим, в этих способах решения отличными являются лишь последовательности умозаключений.

Задача 1.2. Дан квадрат *ABCD* (рис. 1.3). Вершина квадрата *D* соединена с точками *M* и *P*, которые, соответственно, являются серединами сторон *AB* и *BC*. Точка *M* соединена с точкой *N*, являющейся серединой стороны *DC*. Доказать, что $S_{DMK} = S_{NKPC}$.

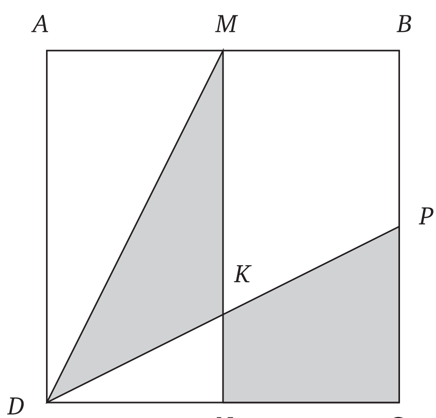

Рис. 1.3

Решение

Способ 1. Из чертежа имеем $S_{DMN} = S_{DPC}$. Отнимем от обеих частей равенства S_{DKN}, получим $S_{DMN} - S_{DKN} = S_{DPC} - S_{DKN}$. Отсюда имеем $S_{DMK} = S_{NKPC}$.

Способ 2. Из чертежа имеем:

$$S_{KPCN} = S_{DMBC} - S_{DMN} - S_{KMBP}; \quad (1)$$

$$S_{DMK} = S_{ABPD} - S_{AMD} - S_{KMBP}. \quad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2), получим $S_{KPCN} - S_{DMK} = S_{DMBC} - S_{DMN} - S_{KMBP} - S_{ABPD} + S_{AMD} + S_{KMBP}$. Учитывая, что $S_{DMBC} = S_{ABPD}$, последнее равенство будет иметь вид $S_{KPCN} - S_{DMK} = S_{AMD} - S_{DMN}$. Прямоугольник *AMND* разделен диагональю *DM* на два равных треугольника: $\Delta ADM = \Delta DMN$, тогда $S_{AMD} = S_{DMN}$. Учитывая это, получим $S_{KPDN} - S_{DMK} = 0$, откуда окончательно имеем $S_{KPDN} = S_{DMK}$.

Задача 1.3. К плоскости прямоугольника *ABCD* через точку *A* проведен перпендикуляр, на котором взята точка *K*, соединенная с точками *B, C* и *D* (рис. 1.4). Найти *AK*, если $KB = 6$ м, $KC = 7$ м, $KD = 5$ м.

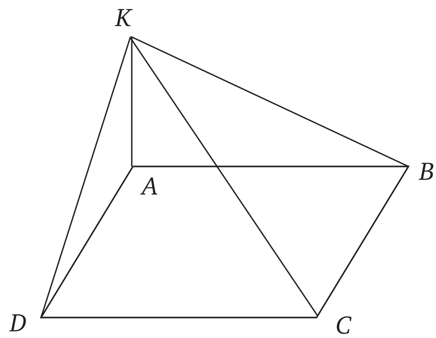

Рис. 1.4

Дано: *ABCD* — прямоугольник; $AK \perp (ABC)$, $KB = 6$ м, $KC = 7$ м, $KD = 5$ м.

Найти: *AK*.

Решение

Метод 1. 1. Рассмотрим прямоугольный треугольник *KDC* ($\angle KDC = 90°$ по теореме о трех перпендикулярах). По теореме Пифагора имеем

$$DC = \sqrt{49-25} = \sqrt{24} \text{ (м)}.$$

2. По свойству прямоугольника имеем $AB = DC = \sqrt{24}$ (м).

3. Из прямоугольного треугольника *ABK* имеем

$$AK = \sqrt{36-24} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (м)}.$$

Метод 2. Введем обозначения: $AB = x$, $AC = z$, $AD = y$.

1. Из прямоугольного ΔAKB имеем $AK^2 = 36 - x^2$.
2. Из прямоугольного ΔKAC имеем, $AK^2 = 49 - z^2$.
3. Из прямоугольного ΔKAD имеем, $AK^2 = 25 - y^2$.
4. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} AK^2 = 36 - x^2, \\ AK^2 = 49 - z^2, \\ AK^2 = 25 - y^2. \end{cases}$$

5. Учитывая, что $z^2 = x^2 + y^2$, система примет вид

$$\begin{cases} AK^2 = 36 - x^2, \\ AK^2 = 49 - x^2 - y^2, \\ AK^2 = 25 - y^2. \end{cases}$$

Решая систему (удобно из второго уравнения вычесть первое уравнение системы и третье уравнение), получим $-AK^2 = -12^2$, откуда $AK = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (м).

Мы видим, что эти два решения строятся на разных логических основах, а значит, речь должна идти о двух разных методах решения: геометрическом и алгебраическом.

Задача 1.4. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике каждая из его диагоналей делит его площадь пополам, то он является параллелограммом.

Решение

Метод 1. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 1.5), в котором AC и BD — диагонали, проведем $BN \perp AC$ и $DM \perp AC$.

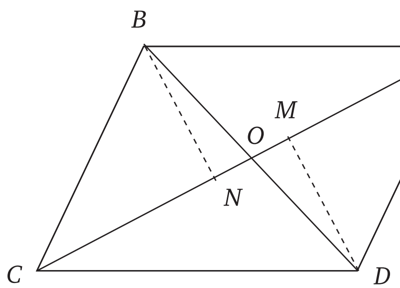

Рис. 1.5

По условию, $S_{ABC} = S_{ADC}$. Учитывая, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN$, а $S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DM$, имеем $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DM$, откуда следует, что $BN = DM$. $\angle MOD = \angle NOB$ как вертикальные, следовательно, прямоугольные треугольники BON и MOD равны по катету и острому углу. Отсюда имеем $BO = OD$.

Аналогично доказывается равенство $OC = OA$. Следовательно, мы получили, что в выпуклом четырехугольнике его диагонали в точке пересечения делятся пополам, а это и означает, что четырехугольник — параллелограмм.

Метод 2. Обозначим площадь четырехугольника буквой S. Тогда по условию задачи $S_{BCD} = \frac{S}{2}$ и $S_{ACD} = \frac{S}{2}$, откуда $S_{BCD} = S_{ACD}$. И так как площади треугольников BCD и ACD равны и основанием у них является один и тот же отрезок CD, то и высоты этих треугольников будут равными (т.е. мы доказали, что все точки отрезка AB отстоят на одинаковое расстояние от отрезка CD, а значит, $AB \parallel CD$). Аналогично доказывается параллельность отрезков AD и BC. Из того, что в четырехугольнике противоположные стороны оказались попарно параллельны, мы заключаем, что он является параллелограммом.

Метод 3. Построим к предложенной задаче новый чертеж (рис. 1.6).

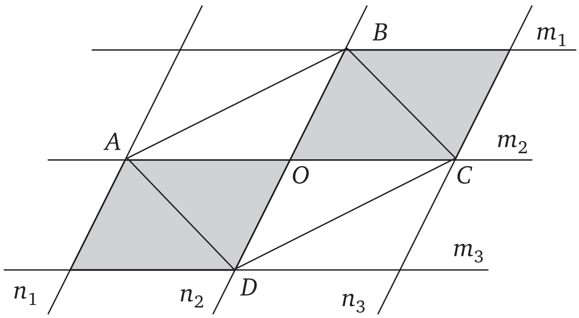

Рис. 1.6

Проведем через B и D прямые m_1 и m_3, параллельные AC, через A и C — прямые n_1 и n_3, параллельные BD.

Так как по условию задачи $S_{ABC} = S_{ADC}$ и AC — общее основание треугольников ABC и ADC, то высоты этих треугольников равны и прямые m_1 и m_3 находятся на равных расстояниях от прямой m_2. Аналогично рассуждение о прямых n_1 и n_3.

При центральной симметрии с центром O прямая m_1 переходит в прямую m_3, прямая n_1 переходит в прямую n_3, а прямые m_2 и n_2 переходят сами в себя как прямые, проходящие через центр симметрии. Тогда эта центральная симметрия переведет точку B (точка пересечения прямых m_1 и n_2) в точку D (точка пересечения прямых m_3 и n_2), а точку A (точка пересечения прямых m_2 и n_1) — в точку C (точка пересечения прямых m_2 и n_3). В силу свойства центральной симметрии $AB = CD$ и $BC = DA$, а значит, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство в математике и других дедуктивных науках есть цепочка правильных умозаключений, идущих от исходных для данной теории посылок, признанных истинными, к доказываемому утверждению.

Основным инструментом доказательства теорем являются умозаключения. *Умозаключение* — рассуждение, в ходе которого из одного или нескольких суждений (называемых посылками умозаключения), выводится новое суждение (называемое заключением или следствием), логически вытекающее из посылок.

Формой дедуктивных умозаключений, используемых при доказательстве теоремы, является *силлогизм*. В силлогизме содержится три понятия, а состоит он из двух посылок и вывода. Его структуру можно представить в таком виде:

«Все М есть Р» — бóльшая посылка (БП);

М. «К есть М» — меньшая посылка (МП);

Р. «К есть Р» — вывод (В).

Приведем пример силлогизма: «Все ромбы (М) есть параллелограммы (Р). Квадрат (К) есть ромб (М). Следовательно, квадрат (К) есть параллелограмм (Р)».

Цепочка последовательно связанных силлогизмов, устанавливающая истинность теоремы, называется доказательством теоремы.

В качестве примера такой цепочки силлогизмов рассмотрим доказательство теоремы из курса 8-го класса[1].

Теорема 1.3. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Дано: AB, CD — хорды, E — точка пересечения хорд (рис. 1.7).

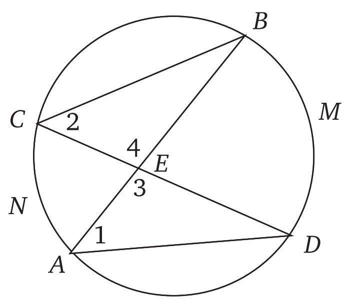

Рис. 1.7

Доказать: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Доказательство.

Силлогизм 1:

БП: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны;

МП: вписанные углы $\angle 1$ и $\angle 2$ опираются на одну и ту же дугу BMD;

В: $\angle 1 = \angle 2$.

Силлогизм 2:

БП: вертикальные углы равны;

МП: $\angle 3$ и $\angle 4$ — вертикальные;

В: $\angle 3 = \angle 4$.

Силлогизм 3:

БП: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны;

МП: два угла ($\angle 1$ и $\angle 3$) треугольника AED соответственно равны двум углам ($\angle 2$ и $\angle 4$) треугольника CEB;

В: $\Delta AED \backsim \Delta CEB$.

[1] Геометрия : учебник для 7—9 классов средней школы / Л. С. Атанасян [и др.].

Силлогизм 4:

БП: в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны;

МП: стороны *AE*, *DE* и *CE*, *BE* — сходственные стороны подобных треугольников *AED* и *CEB*;

В: $\frac{AE}{CE}=\frac{DE}{BE}$.

Силлогизм 5:

БП: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции;

МП: *AE* и *BE* — крайние члены, а *DE* и *CE* — средние члены одной и той же верной пропорции;

В: $AE \cdot BE = DE \cdot CE$.

Теорема доказана.

Проведение любого доказательства опирается на три блока знаний и умений: содержательный, структурный, логический.

В *содержательный блок* входят элементы, связанные с ранее изученными математическими понятиями и фактами, которые использованы или в формулировке утверждения, или в качестве аргументов при проведении рассуждений. Эти элементы существенно зависят от логической структуры курса, от его аксиоматики, от методических особенностей изложения и т.д., а поэтому для одной и той же теоремы в различных учебниках содержательный блок может оказаться различным.

В *структурный блок* входят знания и умения, связанные со структурой утверждения и возможностями ее преобразования. В этот блок входят умение выделять условие и заключение теоремы, умение преобразовывать логическую форму теоремы с целью получения более простых подтеорем и т.д.

Логический блок содержит знания и умения, связанные с правилами логических рассуждений.

Различают частные и общие методы доказательства теорем. Рассмотрим каждую группу методов в отдельности.

1.2.1. Частные методы доказательства

К частным относят метод геометрических преобразований, векторный метод, координатный метод, алгебраический метод и т.д. Рассмотрим примеры некоторых частных методов доказательства (попутно будут затронуты не только задачи на доказательство, но и задачи другого характера).

Векторный метод

Задача 1.5. Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных ребер правильного тетраэдра, есть общий перпендикуляр этих ребер.

Решение

Пусть ребро тетраэдра равно a. Введем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\overrightarrow{MN}$ (рис. 1.8). Пользуясь определением разности векторов, запишем:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}).$$

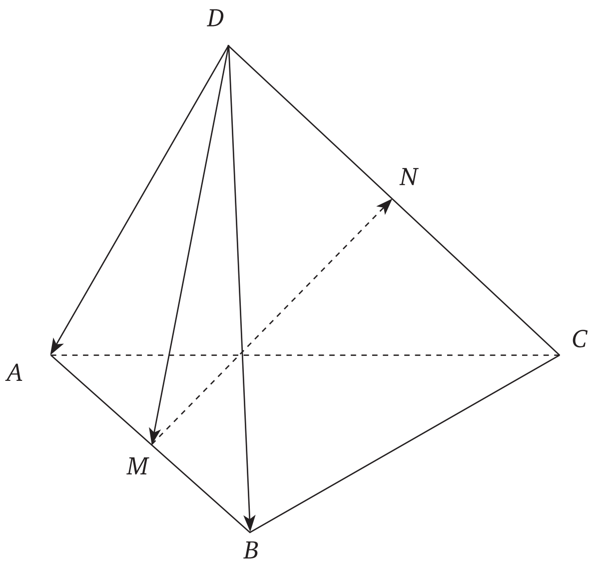

Рис. 1.8

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{c}\cdot(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(a^2-a^2\cdot\cos 60^\circ-a^2\cdot\cos 60^\circ)=0.$$

Следовательно, $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. А это условие перпендикулярности векторов, т.е. $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{MN}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$.

Задача 1.6. Доказать, что если четыре точки A, B, C, D таковы, что $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, то $AD\perp DC$.

Решение

Введем обозначения $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ (рис. 1.9). Тогда $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{c}$.

Так как по условию $AB\perp CD$ и $AC\perp BD$, то $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ и $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, т.е. $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ и $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$.

Раскрывая скобки и складывая почленно два полученных равенства, получим $\vec{b}\vec{c}-\vec{a}\vec{c}=0$. Тогда $(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=0$, т.е. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, а это на векторном языке означает, что $AD\perp DC$.

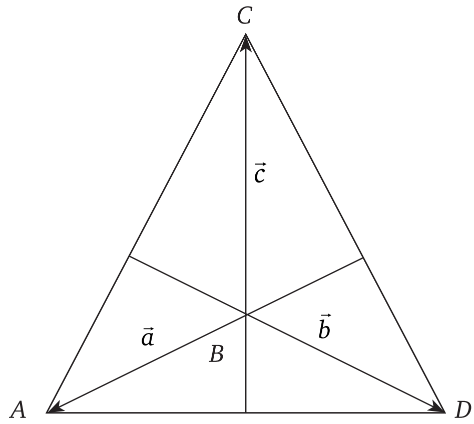

Рис. 1.9

Метод доказательства, основанный на перемещении плоскости

Задача 1.7. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, вне его, построен квадрат $ABMN$ (рис. 1.10) с центром в O. Доказать, что луч CO — биссектриса угла ACB.

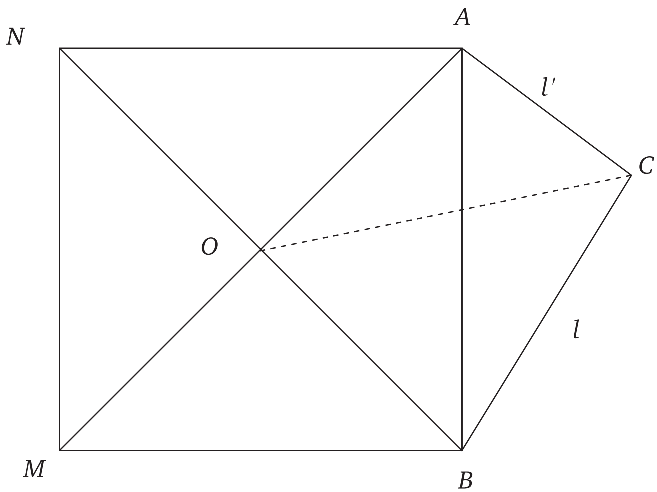

Рис. 1.10

Решение

Рассмотрим поворот вокруг точки O на 90°. Будем иметь $R_O^{90°}(B)=A$. Обозначим $BC = l$ и найдем $R_O^{90°}(l)=l'$. $B \in l'$, а отсюда следует, что $A \in$ $\in l'$. Кроме того $\angle ll' = 90°$.

Прямая AC проходит через точку A и перпендикулярна прямой BC. Следовательно, $l' = AC$. При повороте расстояния сохраняются, поэтому $\rho(O, BC) = \rho(O, AC)$. Отсюда заключаем, что точка O принадлежит биссектрисе угла ACB.

Задача 1.8. Доказать, что если пятиугольник имеет две оси симметрии, то он правильный.

Решение

Пусть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 1.11) имеет две оси симметрии. Каждая из них проходит через вершину и середину противоположной стороны. Если одна ось проходит через вершину A_1 и середину стороны A_3A_4, то имеем: $A_1A_2 = A_1A_5$; $A_2A_3 = A_5A_4$; $\angle A_2 = \angle A_5$; $\angle A_3 = \angle A_4$.

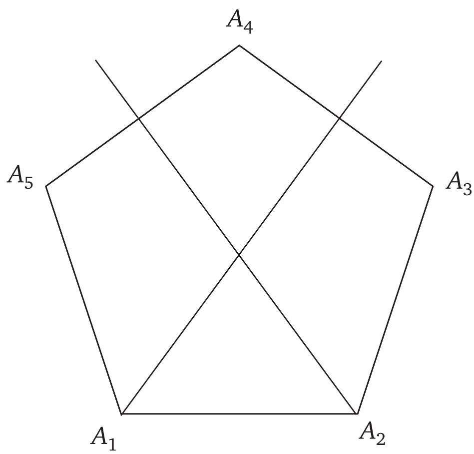

Рис. 1.11

Если вторая ось проходит через вершину A_2 и середину стороны A_4A_5, то имеем: $A_1A_2 = A_2A_3$; $A_1A_5 = A_3A_4$, $\angle A_1 = \angle A_3$, $\angle A_4 = \angle A_5$.

Сопоставляя полученные соотношения, получим, что пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ правильный.

Задача 1.9. Дан квадрат $ABCD$ (рис. 1.12, *а*). На стороне AB и на диагонали AC взяты соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 3 : 2$, $AQ : QC = 4 : 1$. Доказать, что величины углов треугольника PQD равны 45°, 45°, 90°.

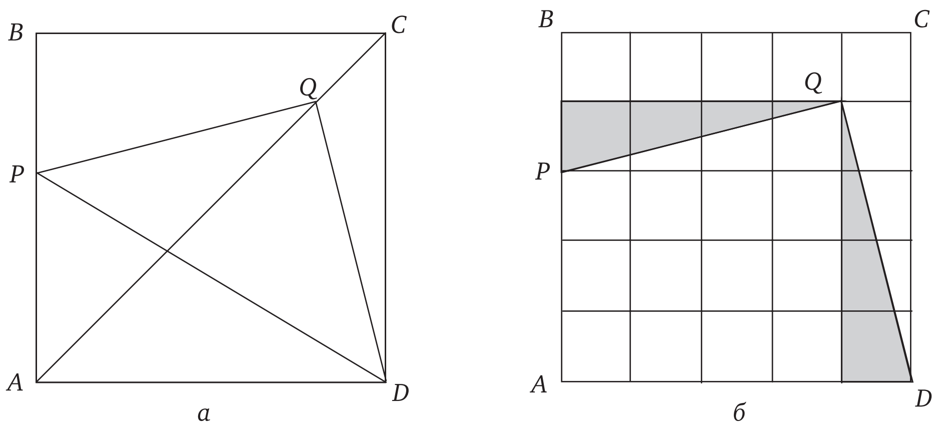

Рис. 1.12

Решение

Разделим квадрат $ABCD$ на 25 маленьких квадратиков. В силу условия задачи точки P и Q окажутся вершинами некоторых из этих квадратиков (рис. 1.12, *б*). Так как прямоугольные треугольники, заштрихованные на рисунке, равны и так как один из них получается из другого поворотом вокруг точки Q на 90°, то мы имеем: $PQ = QD$, $\angle PQD = 90°$. Видим, что PQD является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой PD, следовательно, $\angle PQD = 90°$, $\angle QPD = \angle PDQ = 45°$.

Метод доказательства, основанный на композиции перемещений плоскости

Задача 1.10. На сторонах AB и BC треугольника ABC (рис. 1.13), вне его, построены квадраты. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных квадратов и середина отрезка AC, прямоугольный и равнобедренный.

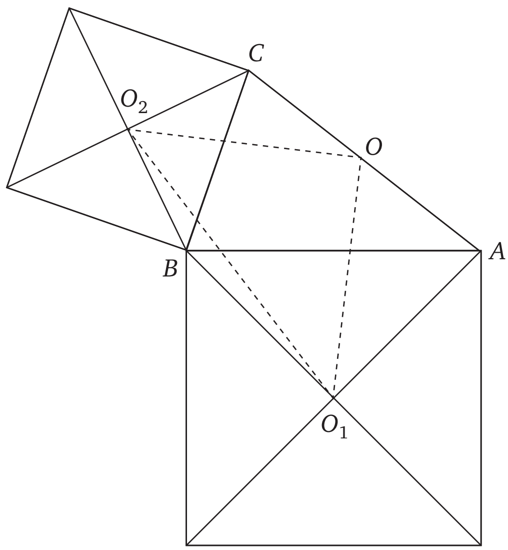

Рис. 1.13

Решение

Пусть O_1 — центр квадрата, построенного на стороне AB, O_2 — центр квадрата, построенного на стороне BC. Тогда $R_{O_1}^{90°}(A) = B$, $R_{O_2}^{90°}(B) = C$.

Следовательно, $R_{O_2}^{90°}(R_{O_1}^{90°}(A)) = C$. Но $R_{O_2}^{90°}R_{O_1}^{90°}$ — поворот на 180°, т.е. центральная симметрия относительно точки O, где O — середина отрезка AC. Значит, $\angle OO_1O_2 = \angle O_1O_2O = 45°$; $\angle O_2OO_1 = 90°$. Треугольник OO_1O_2 — прямоугольный и равнобедренный.

Задача 1.11. На сторонах произвольного треугольника ABC (рис. 1.14), вне его, построены равносторонние треугольники ABC', BCA', ACB'. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных треугольников, равносторонний.

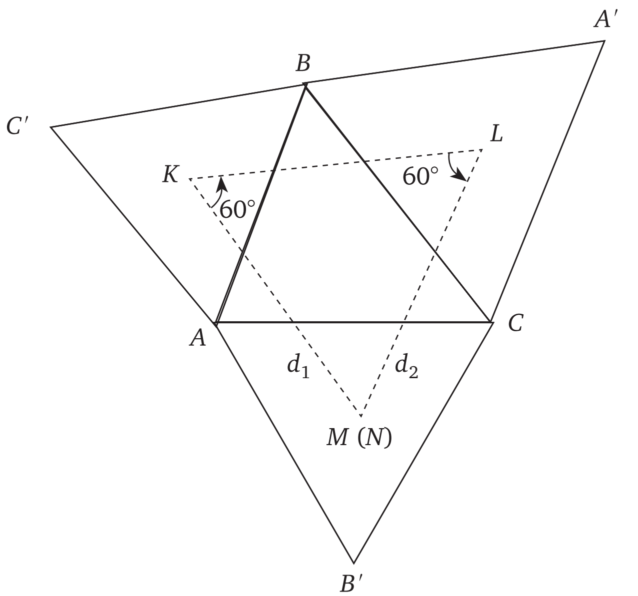

Рис. 1.14

Решение

Центры равносторонних треугольников ABC', BCA', ACB' обозначим соответственно K, L, M. Повороты $R_K^{120°}$ и $R_L^{120°}$ представим в виде композиции двух осевых симметрий: $R_K^{120°} = dd_1$, $R_L^{120°} = d_2 d$, где $d = KL$. Тогда $R_L^{120°} \cdot R_K^{120°} = (d_2 d)\cdot(dd_1) = d_2 d_1$. С другой стороны, $R_L^{120°} \cdot R_K^{120°} = R_N^{240°}$, где $N = d_1 \cap d_2$. Очевидно, что треугольник KLN — равносторонний. Покажем, что $N = M$. Обе части $R_L^{120°} \cdot R_K^{120°} = R_N^{240°}$ умножим слева на $R_M^{120°}$. Получим $R_M^{120°} \cdot R_L^{120°} \cdot R_K^{120°} = R_M^{120°} \cdot R_N^{240°}$, $R_M^{120°} \cdot R_L^{120°} \cdot R_K^{120°}(A) = R_M^{120°} \cdot R_L^{120°}(B) = R_M^{120°}(C)$. Отсюда следует, что $R_M^{120°} \cdot R_N^{240°}$ — тождественное преобразование. Найдем образ точки N. Очевидно, что $R_M^{120°} \cdot R_N^{120°}(N) = N$. С другой стороны, $R_M^{120°} \cdot R_N^{120°}(N) = R_M^{120°}(N) = N$. В повороте $R_M^{120°}$ центр поворота — единственная неподвижная точка, поэтому $N = M$. Таким образом, треугольник KLM — равносторонний.

Геометрический метод доказательства

Задача 1.12. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного треугольника, до стороны этого треугольника есть величина постоянная для данного треугольника.

Решение

Пусть внутри правильного треугольника ABC (рис. 1.15) взята произвольно точка M и расстояния от точки M до сторон треугольника AB, AC, BC соответственно равны h_1, h_2, h_3.

Соединив точку M с вершинами треугольника ABC, разобьем его на три треугольника. Тогда площадь треугольника ABC будет равна сумме площадей этих треугольников, т.е. $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM}$.

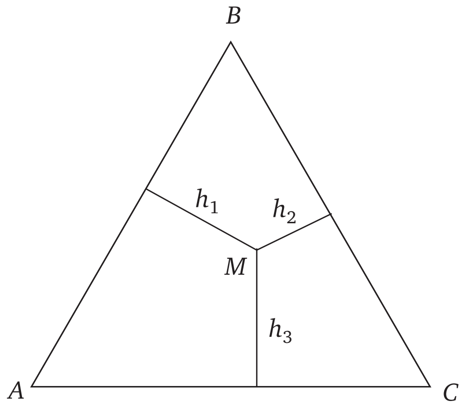

Рис. 1.15

Обозначим длину стороны треугольника через a и длину его высоты через h. Получим $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3$, откуда $h_1 + h_2 + h_3 = h$, т.е. сумма расстояний от точки M до сторон равностороннего треугольника ABC есть величина постоянная, равная высоте треугольника.

Покажем, как можно решить эту же задачу иначе.

Пусть внутри равностороннего треугольника ABC взята произвольная точка P (рис. 1.16), из которой опущены перпендикуляры PD, PE и PF соответственно на BC, CA и AB.

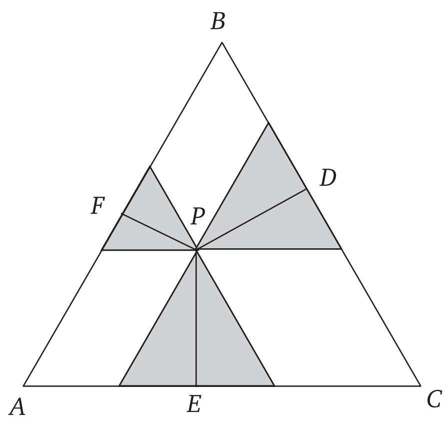

Рис. 1.16

Проведем через точку P три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Три образовавшихся треугольника (они на рисунке заштрихованы) также равносторонние, и сумма длин их сторон равна сумме длин сторон треугольника ABC. Значит, и сумма длин их высот равна длине высоты треугольника ABC, которая есть константа.

Заметим, что эта задача может быть обобщена на случай любого выпуклого правильного многоугольника следующим образом.