

Л. И. Боженкова

# МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

УДК 514  
ББК 22.151  
Б76

**Боженкова Л. И.**

**Б76** Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии / Л. И. Боженкова. — 5-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 208 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-749-7

Цель книги — помочь учителю математики сформировать у учеников универсальные учебные действия при обучении геометрии, что отражает задачу, сформулированную в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования второго поколения.

Для учителей математики школ, лицеев, колледжей, а также студентов и аспирантов математических факультетов педагогических вузов.

УДК 514  
ББК 22.151

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии / Л. И. Боженкова. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 205 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-1887-2.

16+

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

ISBN 978-5-93208-749-7

© Лаборатория знаний, 2015

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	<b>6</b>
<b>Глава 1. Познавательные универсальные учебные действия в обучении геометрии.</b> .....	<b>9</b>
§ 1.1. Содержание познавательных универсальных учебных действий. ....	9
1.1.1. Понятие познавательных универсальных учебных действий .....	9
1.1.2. Сравнение .....	13
1.1.3. Подведение под понятие. ....	13
1.1.4. Анализ и синтез .....	18
1.1.5. Выведение следствий .....	19
1.1.6. Установление причинно-следственных связей и построение логической цепи рассуждений, доказательства .....	22
§ 1.2. Постановка и решение проблем при обучении геометрии. ....	26
1.2.1. Алгоритмизация как способ преобразования учебной информации .....	28
1.2.2. Составление геометрических задач .....	31
§ 1.3. Теоретические основы становления познавательных учебных действий при обучении геометрии .....	39
<b>Глава 2. Регулятивные универсальные учебные действия в обучении геометрии.</b> .....	<b>46</b>
§ 2.1. Основа саморегуляции при освоении геометрии — регулятивные универсальные учебные действия .....	46
§ 2.2. Регуляция деятельности при обучении геометрическим понятиям .....	50
§ 2.3. Регуляция деятельности при обучении теоремам .....	55
§ 2.4. Регуляция деятельности при обучении решению задач. ....	65

<b>Глава 3. Коммуникативные и личностные универсальные учебные действия . . . . .</b>	<b>75</b>
§ 3.1. Формирование коммуникативных УУД при обучении геометрии . . . . .	75
§ 3.2. Личностные универсальные учебные действия при обучении геометрии . . . . .	84
<b>Глава 4. Система обогащающих упражнений для формирования УУД при обучении геометрии . . . . .</b>	<b>88</b>
§ 4.1. Требования к системе обогащающих упражнений . . . . .	88
§ 4.2. Обогащающие работы по геометрии для седьмого класса . . . . .	93
Работа № 1. Прямая, отрезок, луч, угол . . . . .	93
Работа № 2. Биссектриса угла. Сравнение отрезков и углов . . . . .	94
Работа № 3. Измерение углов . . . . .	96
Работа № 4. Измерение отрезков и углов . . . . .	97
Работа № 5. Вертикальные и смежные углы . . . . .	98
Работа № 6. Свойства смежных и вертикальных углов . . . . .	99
Работа № 7. Первый признак равенства треугольников . . . . .	102
Работа № 8. Признаки равных треугольников: составление задач . . . . .	104
Работа № 9. Признаки равных треугольников: составление и решение задач . . . . .	106
Работа № 10. Задачи на построение . . . . .	107
Работа № 11. Признаки и свойства параллельных прямых . . . . .	110
Работа № 12. Сумма углов треугольника . . . . .	112
Работа № 13. Признаки равенства прямоугольных треугольников . . . . .	114
Работа № 14. Решение задач на построение . . . . .	116
Работа № 15. Как мы изучали геометрию в 7 классе . . . . .	118
Ответы и указания к работам для 7 класса . . . . .	119
§ 4.3. Обогащающие работы по геометрии для 8 класса . . . . .	127
Работа № 1. Понятие и свойства параллелограмма . . . . .	127
Работа № 2. Признаки параллелограмма . . . . .	128
Работа № 3. Трапеция и параллелограммы . . . . .	130

Работа № 4. Свойства трапеции и параллелограмма: составление задач . . . . .	132
Работа № 5. Решение задач на построение . . . . .	134
Работа № 6. Площадь многоугольника . . . . .	136
Работа № 7. Решение задач на вычисление площадей . . . . .	139
Работа № 8. Подобные треугольники. . . . .	143
Работа № 9. Подобие: решение и составление задач . . . . .	145
Работа № 10. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника . . . . .	146
Работа № 11. Вписанный угол . . . . .	146
Работа № 12. Векторы. . . . .	148
Работа № 13. Как мы изучали геометрию в 8 классе . . . . .	149
Ответы и указания к работам для 8 класса . . . . .	151
Указатель таблиц, содержащихся в пособии . . . . .	161
Библиография. . . . .	163
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>166</b>

# Глава 1

## Познавательные универсальные учебные действия в обучении геометрии

В главе рассматриваются следующие теоретические вопросы:

- способы преобразования учебной информации школьного курса геометрии как основа познавательных общеучебных действий;
- операциональный состав познавательных общеучебных и логических учебных действий, необходимых для усвоения геометрии, их взаимосвязь;
- связь познавательного учебного действия «постановка и решение проблем» с проблемным обучением;
- использование геометрических задач, подлежащих алгоритмизации (особому способу преобразования информации), для формирования учебного действия «постановка и решение проблем»;
- составление задач учениками как средство формирования учебного действия «постановка и решение проблем»;
- взаимосвязь компонентов проблемного обучения и познавательных учебных действий при обучении геометрии;
- формирование познавательных учебных действий при обучении геометрии.

### § 1.1. Содержание познавательных универсальных учебных действий

**1.1.1. Понятие познавательных универсальных учебных действий.** Под познавательными действиями понимают такие, которые обеспечивают *познание* — умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку. В психологии познание обозначает способность к умственному восприятию и переработке внешней информации. Результатом процесса позна-

вательных действий [3, 47]. В соответствии с деятельностным подходом, действие представляет перечень операций, специально организованных для решения задач определённого типа разной степени обобщённости. Известный российский психолог Н. А. Менчинская отмечала, что действие, усвоенное учащимся в процессе учебно-познавательной деятельности, становится умением [4].

В соответствии с программой формирования УУД, *к познавательным действиям относятся*: общеучебные, логические учебные действия и постановка и решение проблем. Их функция — обеспечение успешности усвоения знаний, умений и навыков. Познавательные общеучебные действия (ПОД) направлены на поиск необходимой информации, структурирование информации и знаний, на выполнение знаково-символических действий, в том числе моделирования; на выбор способов решения задач [2].

Поиск необходимой информации при обучении математике ученики осуществляют при работе с учебной и дополнительной литературой. В настоящее время информация может быть представлена на бумажных и электронных носителях, в том числе в сети Интернет. Успешное использование интернет-ресурсов при освоении математики предполагает наличие у ученика следующих основных умений:

- осуществлять поиск информации о существующих учебных ресурсах (образовательных порталах, сайтах и др.);
- использовать информационно-поисковые системы: электронные каталоги библиотек, поисковые системы в Интернете и т. п., электронные словари и энциклопедии для поиска и получения информации;
- использовать автоматизированные обучающие системы;
- составлять собственный, собранный самостоятельно, каталог учебных и научных интернет-ресурсов.

Формирование указанных умений является задачей процесса обучения информатике. Однако нацеленность процесса обучения математике на использование ресурсов для организации самостоятельной работы учеников вносит свой вклад в совершенствование указанных умений и качества усвоения содержания математики.

В любом случае информация, полученная в результате поиска, — это текстовая информация, которую ученику необходимо самостоятельно переработать, для чего и необходимы познавательные общеучебные действия. Переработка информации включает в себя её преобразование. Преобразование как интерпретация, организация знаний связана со знаково-символической деятельностью человека, в результате которой информация представляется в виде модели. В процессе преобразования информации происходит её запомина-

ние, являющееся основой процессов накопления, сохранения информации и последующего использования знаний. П. И. Зинченко, рассматривая непроизвольное запоминание как продукт целенаправленной учебно-познавательной деятельности (УПД), а произвольное запоминание — как специальную мнемическую деятельность, особое место отводил непроизвольному запоминанию в процессе обучения. Он сформулировал следующие условия продуктивного непроизвольного запоминания [17].

- Если учебная информация входит в содержание основной цели действия, то она запоминается особенно продуктивно.
- Наибольшая успешность непроизвольного запоминания учебной информации достигается применением активных и содержательных способов работы с ней.
- Непроизвольное запоминание продуктивнее, если учащиеся ясно понимают логическую структуру учебной информации и чётко представляют себе её основные важнейшие звенья.

Для выполнения перечисленных условий необходимо владеть специальными действиями преобразования учебной информации. Основной способ преобразования информации — структурирование. Однако в обучении математике не менее важную функцию выполняют такие способы преобразования информации, как достраивание [39] и алгоритмизация [27]. Результат преобразования учебной информации школьного курса математики — определённые учебные модели (первый столбец табл. 1), которые в когнитивной психологии и в информатике имеют специальные названия: логические, реляционные, семантические и продукционные (второй столбец табл. 1) [23, 47]. Для получения учебных моделей необходимы соответствующие им познавательные общеучебные действия (ПОД), перечисленные в последнем столбце табл. 1. Содержание этой таблицы раскрывается в следующем параграфе.

Трудности, возникающие при обучении математике, связаны в том числе с недостаточно сформированным умением переходить от одной модели к другой. Если преобразование информации выполняется на основе применения законов логики, то получаются логические модели. Они связаны с логическими познавательными действиями, поэтому типы учебных моделей и операциональный состав соответствующих познавательных УД представлены при рассмотрении логических познавательных действий. Это ещё раз подчёркивает взаимосвязь и условность деления познавательных действий, что особенно прослеживается при их формировании (гл. 4).

Познавательные логические учебные действия необходимы для формирования общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики. К ним относятся: 1) сравнение; 2) под-

Таблица 1

**Модели представления информации школьного курса математики  
и познавательные общеучебные действия**

Типы моделей представления учебной информации		Познавательные УД для преобразования (определённым способом) учебной информации школьного курса математики
в обучении математике (учебные модели)	в психологии	
1) схемы определений понятий; 2) схемы поиска решения задачи (доказательства теоремы); 3) знаковая модель записи доказательства теоремы (решения задачи)	логические модели	<i>Структурирование, дистраивание</i> 1) составление схемы определения понятия; 2) составление схемы поиска решения задачи (доказательства теоремы); 3) выполнение записи доказательства теоремы (решения задачи)
4) поисковые области понятий, связанных отношением; 5) наборы объектов для подведения под понятие; 6) таблицы, информационные схемы	реляционные (сообщающие) модели	<i>Дистраивание, структурирование</i> 4) составление поисковой области; 5) составление набора объектов для подведения под понятие; 6) составление информационной схемы
7) классификационные и систематизационные схемы	семантические модели	<i>Структурирование</i> 7) составление классификационной (систематизационной) схемы
8) предписания для решения геометрических задач определённого класса	продукционные модели	<i>Алгоритмизация</i> 8) составление предписания для решения задач определённого класса

ведение под понятие; 3) анализ и синтез; 4) выведение следствий; 5) установление причинно-следственных связей; 6) построение логической цепи рассуждения, доказательство [21]. Рассмотрим эти действия с учётом специфики школьного курса математики.

**1.1.2. Сравнение.** Сравнение — приём умственной деятельности, познавательное логическое действие, лежащее в основе суждений о сходстве или различии изучаемых объектов [33].

Сравнение используется при определении понятия, когда для выделения его существенных признаков необходимо абстрагироваться (отвлечься) от несущественных; при поиске общего метода решения задач определённого типа и др. (табл. 2).

Таблица 2

### Состав ПЛД «Сравнение»

- 1) убедиться, что изучаемые объекты сравнимы;
- 2) выявить наблюдением свойства изучаемых объектов (фигур);
- 3) установить различные свойства;
- 4) установить общие свойства объектов — признаки;
- 5) установить существенные и несущественные признаки;
- 6) выбрать основание для сравнения (один из существенных признаков);
- 7) сопоставить объекты по данному основанию;
- 8) сформулировать выводы.

**1.1.3. Подведение под понятие.** Как известно, понятие — это форма мышления, в которой отражаются существенные признаки класса однородных предметов (объектов) или одноэлементного класса [13].

Понятие имеет содержание и объём. Содержание понятия — совокупность существенных признаков, перечисленных в определении понятия. Объём понятия — совокупность (класс) предметов или объектов, которая мыслится в понятии [13]. В школьном курсе геометрии большинство понятий определяется через ближайший род и видовые отличия (около 98%). В курсе алгебры этот способ определения понятий представлен также достаточно весомо (около 70%). Для понятия, которое определяется этим способом, составляется *схема определения понятия* — логическая учебная модель (табл. 1). Схема представляет перечень следующих компонентов: термин (или имя) понятия; существенные признаки понятия; изображение объекта, принадлежащего объёму понятия; обозначение объекта (рис. 1). В данной схеме первый существенный признак — ближайшее родовое понятие, остальные — видовые отличия, причём признаки связаны союзом «и».

<i>Термин (имя):</i>	<i>Изображение</i>
1) ближайшее родовое понятие	— 1-й существенный признак
2) первое видовое отличие	— 2-й существенный признак
3) второе видовое отличие	— 3-й существенный признак
и т.д.	
n) последнее видовое отличие	— n-й существенный признак
<b>Обозначение</b>	

**Рис. 1.** Общая схема определения понятия

Схема определения понятия — результат применения соответствующего познавательного общеучебного действия (ПОД); оно заключается в составлении схемы определения понятия (табл. 1), а его состав представлен в табл. 3.

*Таблица 3*

### **Состав ПОД «Составление схемы определения понятия»**

1) сформулировать определение понятия, выявить вид определения: если понятие определено через ближайший род и видовые отличия, то перейти к п. 2, если нет, то к п. 6;
2) назвать имя понятия — термин (записать в первой строке);
3) выявить ближайшее родовое понятие (записать во второй строке — № 1);
4) выявить признаки понятия — видовые отличия (записать в следующих строках — № 2, 3, 4 и т. д. по количеству видовых отличий);
5) записать обозначение понятия и выполнить его изображение — получена схема определения понятия;
6) выбрать другой способ записи определения понятия.

Это ПОД, служащее для преобразования учебной информации способом структурирования, подлежит формированию у учащихся (гл. 4).

Схемы определений понятий могут быть составлены в символьной, словесной записи (рис. 2) или в смешанной. Примеры схем определений понятий приведены в приложении 1.

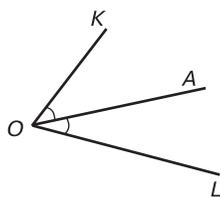
*Подведение под понятие* — приём умственной деятельности, познавательное логическое действие, заключающееся в установлении наличия у объекта существенных признаков данного понятия (табл. 4). Эти признаки являются достаточными или одновременно необходимыми и достаточными условиями [44].

**Биссектриса угла**

- 1) луч
- 2) начало луча — вершина угла
- 3) луч делит угол пополам

И  
И

**Обозначение:**  $OA$  — биссектриса или  
 $\angle KOA = \angle LOA$



**Рис. 2.** Схема определения понятия «Биссектриса угла»

*Таблица 4*

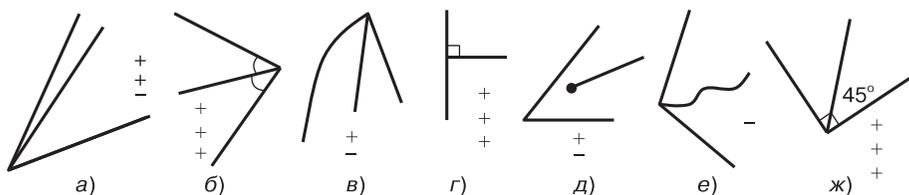
**Состав ПЛД «Подведение объекта под понятие»**

- 1) вспомнить определение понятия, под которое подводится исследуемый объект;
- 2) проверить принадлежность объекта родовому понятию (наличие первого признака);
- 3) проверить наличие у объекта видовых отличий (остальных признаков);
- 4) сделать вывод о принадлежности объекта понятию (все признаки выполняются) или непринадлежности (не выполняется хотя бы один признак).

Чтобы исследуемый объект принадлежал объёму понятия, необходимо, чтобы он обладал всеми признаками, входящими в содержание этого понятия. При этом если хотя бы один из признаков отсутствует, то объект не принадлежит объёму понятия и оставшиеся признаки проверять не нужно. Если информация о наличии признака неопределённая, то неизвестно, принадлежит или нет объект объёму данного понятия.

Действие «Подведение под понятие» используется для первоначального закрепления определения изученного понятия, схема которого в процессе обучения уже составлена. Для этого целесообразно использовать набор специальных объектов, подлежащих исследованию при подведении под понятие.

Таких наборов объектов нет в учебниках, поэтому учителю необходимо знать принцип составления такого набора объектов. Так, например, при введении понятия «Биссектриса угла», схема определения которого представлена на рис. 2, набор объектов может быть таким, как на рис. 3.



**Рис. 3.** Набор объектов для подведения под понятие «Биссектриса угла»

Знаками «+» или «-» на рис. 3 отмечено наличие или отсутствие у исследуемого объекта определённого признака понятия «Биссектриса угла», зафиксированного в соответствующей схеме определения понятия (рис. 2).

Этот набор объектов может быть использован не на заключительном этапе введения понятия в качестве средства для первоначального закрепления определения понятия (когда схема определения понятия уже известна), а на начальном — когда организуется активная УПД учащихся, направленная на «открытие понятия» (§ 2.2). В идеале соответствующие наборы объектов для подведения под определённые понятия могут создавать сами ученики.

Набор объектов для подведения под понятие — результат применения соответствующего познавательного общеучебного действия (ПОД) с достаточно длинным названием «составление набора объектов для подведения под понятие, определяемое через ближайший род и видовые отличия». Условимся кратко называть его «составление набора объектов для подведения под понятие» (табл. 5). Это ПОД необходимо для преобразования учебной информации способом достраивания [39].

*Таблица 5*

**Состав ПОД «Составление набора объектов для подведения под понятие»**

- 1) убедиться: понятие определено через ближайший род и видовые отличия;
- 2) составить схему определения понятия и сосчитать признаки понятия;
- 3) выделить первый признак — ближайшее родовое понятие;
- 4) привести примеры объектов, для которых выполняются все признаки, рассматривая частные случаи и варьируя расположение объектов;
- 5) привести всевозможные примеры объектов, для которых выполняется первый признак и не выполняется хотя бы один из остальных;
- 6) привести примеры объектов, для которых не выполняется первый признак и выполняется один из остальных (если возможно);
- 7) изобразить полученные объекты и пронумеровать их.

Если содержание понятия раскрывается в его определении, то объём понятия раскрывается в классификации. Классификационные и систематизационные схемы имеют большое значение для понимания и запоминания учебной информации школьного курса математики.

Способы фиксации связей между объектами могут быть различными: рисунки, словесные формулировки, блок-схемная форма записи (рис. 4, 5).

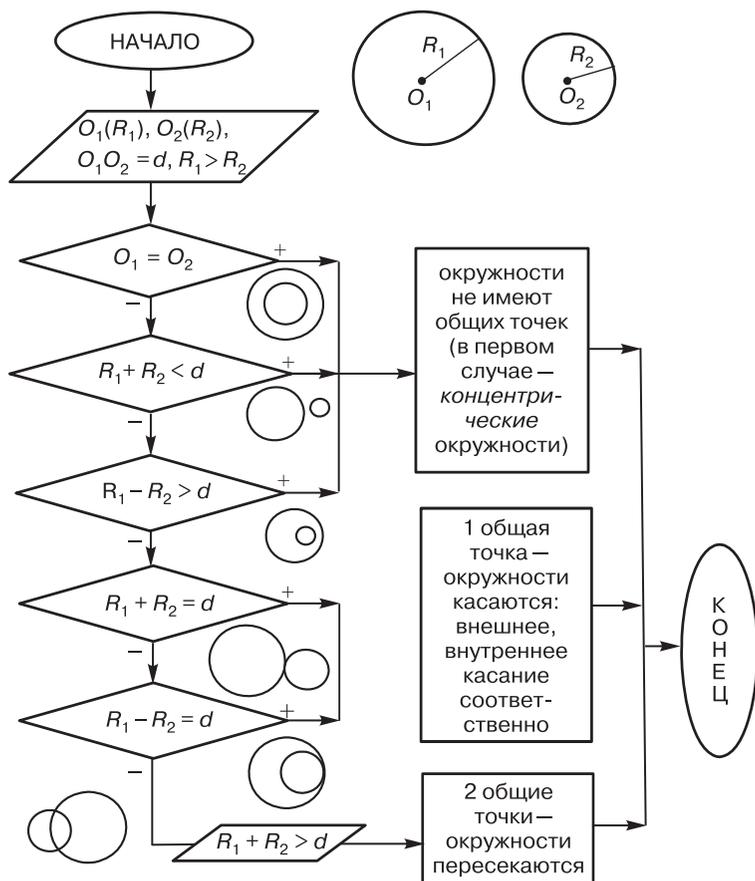
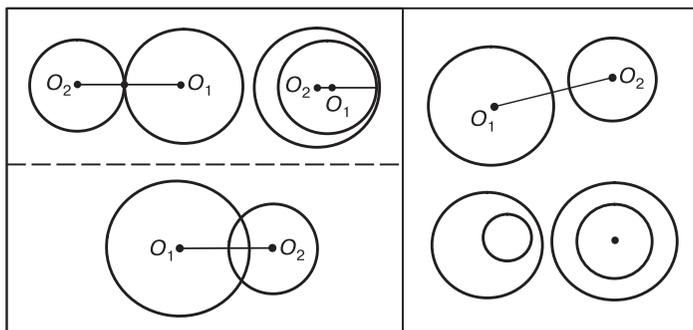


Рис. 4. Предписание для распознавания взаимного расположения двух окружностей

Классификационная схема как учебная модель (семантическая) является результатом структурирования учебной информации и строится с помощью познавательного общеучебного действия (табл. 6).



**Рис. 5.** Классификационная схема взаимного расположения двух окружностей

*Таблица 6*

**Состав ПОД «Составление классификационной или систематизационной схемы взаимосвязи понятий»**

- 1) выделить классифицируемое понятие;
- 2) выяснить, можно ли разбить объекты, принадлежащие объёму данного понятия, на группы:
  - а) выявить объём понятия;
  - б) выяснить, существуют ли объекты, входящие в объём понятия, имеющие видовые отличия; если «да», то к п. 3, если «нет», то к п. 8;
- 3) выбрать основание для разбиения;
- 4) разбить объекты на группы по выбранному основанию (выбрать способ фиксации связей между объектами);
- 5) проверить, выполняются ли требования к классификации:
  - а) объединение всех распределённых на группы объектов составляет объём классифицируемого понятия;
  - б) члены классификации не должны иметь общих элементов; если «да», то к п. 6, если «нет», то к п. 7;
- 6) выполнена классификация;
- 7) выполнена систематизация;
- 8) классификация и систематизация не выполнены.

**1.1.4. Анализ и синтез.** С. Л. Рубинштейн отмечал, что в мыслительном процессе синтез непрерывно переходит в анализ и наоборот, при этом сравнение можно охарактеризовать как анализ, который проходит посредством синтеза и ведёт к некоторому обобщению — к новому синтезу [41].

*Анализ* — приём умственной деятельности, познавательное логическое действие, лежащее в основе мысленного расчленения изучаемых объектов.

*Синтез* — приём умственной деятельности, познавательное логическое действие, лежащее в основе мысленного соединения в единое целое частей или признаков изучаемых объектов, полученных в процессе анализа.

При обучении математике анализ и синтез выступают в самых разнообразных формах и имеют специфику, связанную с содержанием учебной информации, подлежащей изучению. Они выступают как методы решения задач, доказательства теорем, изучения свойств математических понятий и др. Так, например, познавательное логическое действие (ПЛД) «Анализ формулировки теоремы (текста задачи)» имеет состав, представленный в табл. 7.

Таблица 7

### Состав ПЛД «Анализ формулировки теоремы (текста задачи)»

- 1) прочитать формулировку теоремы (прочитать текст задачи и к п. 5);
- 2) сформулировать теорему в терминах «если..., то...»;
- 3) выяснить, какая часть суждения от слова «если» до слова «то» является разъяснительной частью, а какая — условием теоремы;
- 4) часть суждения после слова «то» — заключение теоремы;
- 5) перевести выявленные составляющие теоремы (задачи) на символичный язык: записать «Дано», «Доказать» («Найти», «Построить»);
- 6) при необходимости выполнить чертёж в соответствии с условием.

Состав познавательных логических действий зависит от содержания учебной информации, именно поэтому специфика их формирования связывается с обучением геометрии и алгебре и рассматривается отдельно. Однако возможен перенос отдельных действий, сформированных при обучении геометрии, в процесс обучения алгебре.

**1.1.5. Выведение следствий.** *Выведение следствий* из факта принадлежности объекта объёму данного понятия — приём умственной деятельности, познавательное логическое действие, заключающееся в указании существенных признаков объекта, если известно, что он входит в объём данного понятия. Указанные признаки являются необходимыми [44]. Действие «Выведение следствий» основано на использовании сравнения, анализа и синтеза с учётом специфики предмета математики. Если выполняется выводение следствия только из определения понятия, то это действие называют «раскрытие термина понятия», что схематически изображено на рис. 6.



**Рис. 6.** Схема ПЛД «Раскрытие термина понятия»

Кроме этого следствия выводятся из условия задачи (теоремы), что является необходимым условием успеха при доказательстве теорем и решении задач. Теорему можно рассматривать как базовую задачу на доказательство, поэтому все ПЛД, относящиеся к задачам, применимы при доказательстве теорем. ПЛД «*Выведение следствий из условия задачи*» заключается: в раскрытии терминов всех понятий, которые входят в условие задачи; в использовании теорем-свойств до тех пор, пока не будет выведено требование задачи. Состав этого действия представлен в табл. 8 [26].

Таблица 8

#### Состав ПЛД «Выведение следствий из условия задачи»

- 1) выполнить анализ текста задачи, выделив условие и требование задачи;
- 2) выделить понятия, о которых говорится в *условии* задачи;
- 3) раскрыть термины этих понятий;
- 4) вспомнить теоремы-свойства этих понятий и их формулировки;
- 5) выяснить, какие дополнительные построения необходимо выполнить, и выполнить их;
- 6) если требование не получено, выводить следствия из условий до тех пор, пока в качестве промежуточного следствия не получится требование задачи;
- 7) фиксировать свои рассуждения определённым способом (словесная, символическая запись, схема, дополнительные построения);
- 8) составить план доказательства.

Познавательное логическое действие (ПЛД) «*Выведение следствий из требования задачи*» заключается в раскрытии терминов понятий, содержащихся в требовании задачи; в использовании теорем-признаков этих понятий до тех пор, пока не будет выведено условие задачи. Это ПЛД используется при решении более сложных задач, когда предыдущее действие не дало результатов. Состав этого действия представлен в табл. 9.

Таблица 9

**Состав ПЛД «Выведение следствий из требования задачи»**

- 1) выполнить анализ текста задачи, выделив условие и требование задачи;
- 2) выделить понятия, о которых говорится в *требовании* задачи;
- 3) раскрыть термины этих понятий;
- 4) вспомнить теоремы-признаки этих понятий и их формулировки;
- 5) выяснить, что достаточно доказать, чтобы получить искомое (использовать поисковые области), переформулировать требование;
- 6) выяснить, какие дополнительные построения необходимо выполнить и выполнить их;
- 7) если искомое не получено, сформулировать промежуточное требование и вывести следствия из него до тех пор, пока в качестве следствия не получится условие задачи;
- 9) фиксировать свои рассуждения определённым способом (словесная, символическая запись, схема, дополнительные построения);
- 10) составить план доказательства.

Два ПЛД (табл. 8 и 9) имеют много общих операций, их отличие состоит в том, что в первом рассуждения ведутся от условия к требованию, а во втором — от требования к условию, а также в использовании теорем-свойств (ПЛД, табл. 8) и теорем-признаков (ПЛД, табл. 9).

При решении достаточно сложных задач чаще всего используется ПЛД, являющееся объединением действий, представленных в табл. 8 и 9, которое кратко называется «челнок» — последовательное выведение следствий из требования и условия задачи (табл. 10) [26].

Таблица 10

**Состав ПЛД «Последовательное выведение следствий из требования и условия задачи»**

- 1) выполнить анализ текста утверждения, выделив условие и требование задачи;
- 2) вывести следствия из условия задачи: получить промежуточное условие;
- 3) вывести следствия из требования задачи: получить промежуточное требование;
- 4) вывести следствия из промежуточного условия;
- 5) вывести следствия из промежуточного требования;
- 6) применять шаги 4 и 5 до тех пор, пока поиск не закончится успешно;
- 7) составить план решения задачи.

**1.1.6. Установление причинно-следственных связей и построение логической цепи рассуждений, доказательства** тесно взаимосвязаны, поэтому рассмотрим их в одном пункте. Рассмотренные в предыдущих пунктах познавательные логические действия вносят свой вклад в формирование действий, связанных с доказательством утверждений.

В математике под доказательством понимают цепочку дедуктивных умозаключений, устанавливающих истинность некоторого утверждения на основе аксиом, определений, теорем и правил определённой теории. Дедуктивное умозаключение — это такое умозаключение, у которого между посылками и заключением имеется отношение логического следования. Основной вид дедуктивного умозаключения при обучении доказательствам в школьном курсе математики — простой категорический силлогизм [13].



**Рис. 7.** Общая формула и схема состава категорического силлогизма

Он состоит из большей посылки (БП), меньшей посылки (МП), заключения (рис. 7), где  $P$  — предикат вывода, больший термин;  $S$  — субъект вывода, меньший термин;  $M$  — средний термин, посредник [15]. Например, элементарное конкретное умозаключение, которое получается по правилу силлогизма, выглядит следующим образом:

БП: В равнобедренном треугольнике ( $M$ ) — углы при основании равны ( $P$ );

МП:  $\triangle ABC$  ( $S$ ) — равнобедренный ( $M$ );

З: в  $\triangle ABC$  ( $S$ ) — углы при основании равны ( $P$ ).

Правило силлогизма используется для фиксации результата мысленного построения цепи рассуждений при доказательстве теорем, решении задач. Так, силлогизм, входя в качестве одного шага в цепочку умозаключений, схематически может быть записан в одном из следующих вариантов:

- 1) Так как известно свойство равнобедренного треугольника и в  $\triangle ABC$ :  $AB = BC$ , то  $\angle A = \angle C$ .
- 2) Так как в  $\triangle ABC$ :  $AB = BC$ , то  $\angle A = \angle C$  (по свойству равнобедренного треугольника).
- 3) В  $\triangle ABC$ :  $\angle A = \angle C$  (по свойству равнобедренного треугольника),  $AB = BC$ .

В условиях школьного обучения целесообразно использовать один из вариантов записи, называя меньшую посылку промежуточным условием, большую посылку — обоснованием, заключение — промежуточным выводом (выводом), тогда один из вариантов записи силлогизма представляется схематически (п. 1 табл. 11). Соответственно состав познавательного общеучебного действия «Выполнение записи доказательства теоремы (решения задачи)» отражён в табл. 11.

Таблица 11

**Состав ПОД «Выполнение записи доказательства теоремы (решения задачи)»**

1) вспомнить способ записи доказательства теоремы (решения задачи):

ТАК КАК Условие  
(промежуточное  
условие) ТО Промежуточный  
вывод (вывод) [ Обоснование ]

2) выделить в каждом шаге доказательства (решения) промежуточное условие, промежуточный вывод, обоснование;

3) выполнить пошаговую запись доказательства в соответствии с планом доказательства.

Полный вариант приёма записи доказательства теоремы (решения задачи) представлен в приложении 8г.

ПЛД «выведение следствий» включает фиксирование рассуждения определённым способом (см. п. 7 табл. 8, п. 9 табл. 9). Поэтому результатом этого логического действия являются учебные модели — схемы поиска решения задач, доказательства теорем. Так, при решении следующей задачи процесс поиска решения представлен в виде граф — схемы, являющейся материализацией скрытых умственных рассуждений (рис. 8).

В приведённой схеме поиска (рис. 8) анализ выполняется посредством действия «Выведение следствий из требования задачи», процесс рассуждений при этом фиксируется с помощью стрелок, указывающих направление рассуждений. Синтез заключается в составлении плана решения задачи (номера пунктов плана записаны