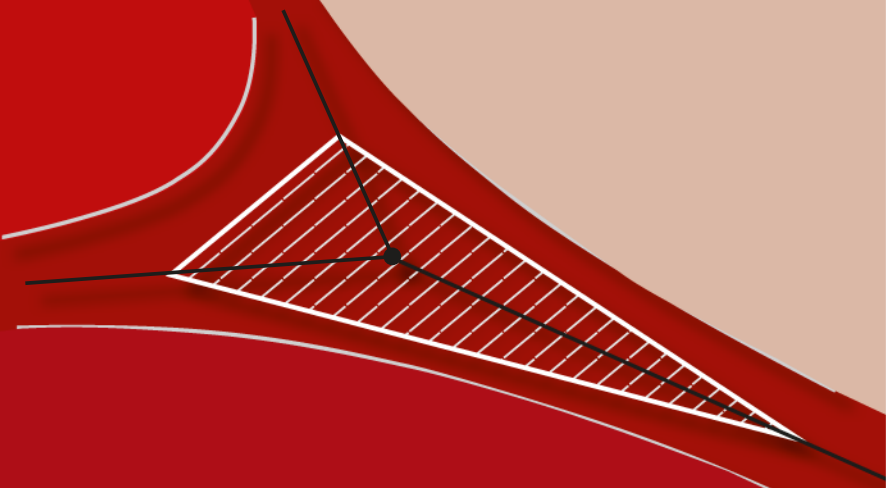


Л. С. Атанасян

ГЕОМЕТРИЯ Лобачевского



Лаборатория
ЗНАНИЙ

УДК 087.5:514

ББК 22.151

A92

Атанасян Л. С.

A92 Геометрия Лобачевского / Л. С. Атанасян. — 4-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 467 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-508-0

Эта книга выгодно отличается от других пособий по геометрии Лобачевского. Материал излагается на основе школьной аксиоматики абсолютной геометрии и аксиомы Лобачевского. Первая часть книги посвящена планиметрии Лобачевского, а вторая — стереометрии. В конце каждой главы даются задачи, в конце книги — ответы и указания к ним.

Книга может с успехом использоваться студентами и преподавателями и физико-математических факультетов университетов, и педагогических вузов. Она также будет полезна учителям классов с углубленным изучением математики для индивидуальной работы с учениками, интересующимися математикой.

УДК 087.5:514

ББК 22.151

Деривативное издание на основе печатного аналога: Геометрия Лобачевского / Л. С. Атанасян. — 2-е изд., испр. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 464 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0814-9.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-93208-508-0

© Лаборатория знаний, 2015

ОБЗОР ОСНОВНЫХ ФАКТОВ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) основана на аксиомах абсолютной геометрии и на аксиоме Лобачевского, поэтому все понятия, определения и теоремы абсолютной геометрии имеют место и в геометрии Лобачевского.

В этой главе дан краткий обзор основных определений и следствий из аксиом абсолютной планиметрии, а сами аксиомы абсолютной планиметрии (аксиомы групп I–IV) приведены в приложении (см. с. 322).

§ 1. Обзор основных следствий и аксиом групп I–III абсолютной планиметрии

1. Простейшие фигуры на плоскости. Равенство фигур. Основными понятиями в планиметрии Лобачевского так же, как и в планиметрии Евклида, являются точки и прямые (основные объекты), принадлежность точки прямой, «лежать между» для трех точек одной прямой и наложение (основные отношения). Сформулируем аксиомы группы I, которые характеризуют взаимное расположение точек и прямых, и аксиомы группы II, которые характеризуют свойства понятия «лежать между». Если точка B лежит между точками A и C , то будем писать $A-B-C$. Если точка A не лежит между точками B и C , то будем писать \overline{ABC} .

Группа I. Аксиомы принадлежности.

I_1 . На каждой прямой лежат по крайней мере две точки*.

* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три прямые», будем считать, что рассматриваемые точки и прямые различны.

- I₂. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.
- I₃. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Группа II. **Аксиомы порядка.**

- II₁. Если точка B лежит между точкой A и точкой C , то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A .
- II₂. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Фигура, состоящая из двух точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком*, а точки A и B — его концами.

- II₃. Каждая точка O , лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые точка O делит остальные точки данной прямой, называется *лучом*, оба этих луча называются *дополнительными* лучами, а точка O — началом этих лучей.

Если точки A и B не принадлежат прямой a , то будем говорить, что они лежат по одну сторону от прямой a , если прямая a не имеет общих точек с отрезком AB . Обозначим это так: $A, B \div a$. Если точки A и B не принадлежат прямой a , то будем говорить, что они лежат по разные стороны от прямой a , если существует точка X , лежащая на отрезке AB и на прямой a . Обозначим это так: $A, B \nmid a$.

- II₄. Каждая прямая a разделяет множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a , а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a .

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, указанных в аксиоме Π_4 , называется *полуплоскостью*, а прямая a — ее границей.

Пользуясь аксиомами групп I–II (см. приложение, с. 444), вводятся простейшие понятия планиметрии и доказывается ряд утверждений и теорем, которые имеют место как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Кроме понятий отрезка, луча, полуплоскости, вводятся понятия угла, внутренней области угла и доказываются утверждения о свойствах этих фигур (см. [1], § 1–4). Не останавливаясь подробно на этом, отметим лишь отдельные важные утверждения и теоремы, которые необходимы для дальнейшего изложения.

1.1°. (Предложение Паша.) Если прямая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C , то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком.

Луч, который исходит из вершины неразвернутого угла и содержит хотя бы одну внутреннюю точку, целиком состоит из внутренних точек угла. Такой луч называется *внутренним лучом угла*.

1.2°. Внутренний луч неразвернутого угла пересекает отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.

Говорят, что угол hk отложен от луча h в полуплоскость λ , если луч h принадлежит границе полуплоскости λ , а луч k — самой полуплоскости.

1.3°. Если углы hk_1 и hk_2 с общей стороной h отложены от этого луча в одну и ту же полуплоскость и лучи k_1 и k_2 не совпадают, то один и только один из лучей k_1 и k_2 является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом.

Понятие равенства фигур в абсолютной геометрии мы вводим с помощью наложения, которое является основным отношением. Наложение — это отображение плоскости в себя. Свойства наложений выражены в аксиомах группы III. Фигура Φ называется *равной* фигуре Φ' , если существует наложение, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ' , т. е. каждая точка фигуры Φ переходит

в некоторую точку фигуры Φ' и каждая точка фигуры Φ' имеет прообраз, принадлежащий фигуре Φ . Запись $\Phi = \Phi'$ означает, что фигура Φ равна фигуре Φ' .

Группа III. **Аксиомы наложения.**

III₁. Каждая фигура равна самой себе.

III₂. Если фигура Φ равна фигуре Φ' , то фигура Φ' равна фигуре Φ .

III₃. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2 , а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3 , то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3 .

III₄. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

III₅. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

III₆. Если hk — неразвернутый угол и $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h' , а луч k — в луч k' .

III₇. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Из этих аксиом легко вывести ряд важных свойств наложений (см. [1], § 5). Отметим, в частности, что при наложении отрезок, луч, прямая, угол, полуплоскость отображаются соответственно на отрезок, луч, прямую, угол, полуплоскость.

Пользуясь аксиомами группы III, можно доказать следующее утверждение:

1.4°. Любое наложение является преобразованием полуплоскости, при котором три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

Из аксиом наложения непосредственно следует, что отношение равенства фигур является отношением эквивалентности.

2. Сравнение отрезков и углов. Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Если на отрезке CD существует

такая точка M , что $AB = CM$, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка CD или отрезок CD больше отрезка AB , и пишут так: $AB < CD$, или $CD > AB$. Основные свойства сравнения отрезков заключаются в следующем:

- а) если $AB < CD$, $CD = EF$ или $AB = CD$, $CD < EF$, то $AB < EF$;
- б) если $AB < CD$, $CD < EF$, то $AB < EF$.

Аналогично вводится сравнение углов. Пусть hk и lm — данные неразвернутые углы. Если существует внутренний луч s угла lm , такой, что $\angle hk = \angle ls$, то говорят, что угол hk меньше угла lm или угол lm больше угла hk , и пишут так: $\angle hk < \angle lm$, или $\angle lm > \angle hk$. Если один из углов развернутый, а другой неразвернутый, то считают, что развернутый угол больше неразвернутого.

Основные свойства сравнения углов аналогичны основным свойствам сравнения отрезков:

- а) если $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$ или $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, то $\angle hk < \angle pq$;
- б) если $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, то $\angle hk < \angle pq$.

Свойства сравнения отрезков и углов доказываются на основании групп аксиом I–III (см. [1], § 6).

3. Смежные и вертикальные углы. Прямой угол. Напомним, что два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами. Два неразвернутых угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются соответственно дополнительными лучами сторон другого угла. Пользуясь аксиомами групп I–III, нетрудно доказать, что если неразвернутые углы равны, то углы, соответственно смежные с ними, равны и что вертикальные углы равны (см. [1], § 7).

Угол называется *прямым*, если он равен одному из углов, смежных с ним. Ясно, что прямой угол равен каждому из своих смежных углов.

Нетрудно доказать, что угол, равный прямому, также является прямым и что любые два прямых угла равны друг другу (см. [1], § 7).

Угол, меньший прямого угла, называется *острым*, а неразвернутый угол, больший прямого угла, — *тупым*. Нетрудно доказать, что угол, смежный с острым углом, является тупым, а угол, смежный с тупым, — острым.

Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными* (или взаимно перпендикулярными), если они при пересечении образуют четыре прямых угла. Сформулируем теорему о перпендикулярных прямых (см. [1], § 8). Этой теоремой и ее следствиями мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем изложении.

Теорема. *Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.*

Следствие 1. *Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, не пересекаются.*

Рассмотрим прямую a и точку A , не лежащую на ней; отрезок $АН$, соединяющий точку A с точкой H прямой a , называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a , если $АН \perp a$.*

Следствие 2. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести один и только один перпендикуляр к этой прямой.*

§ 2. Треугольники

1. Признаки равенства треугольников. Понятие треугольника и определения элементов треугольника, известные читателю из курса геометрии средней школы, относятся к абсолютной геометрии, поэтому они являются также понятиями геометрии Лобачевского. Все теоремы и утверждения о треугольниках, которые в школьном курсе геометрии доказываются без помощи аксиомы параллельных прямых, т. е. используя только аксиомы абсолютной геометрии, имеют место также в геометрии Лобачевского. К этим теоремам относятся в первую очередь признаки равенства треугольников, в частности прямоугольных треугольников, и теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Рассмотрим сначала три теоремы, выражающие основные признаки равенства треугольников. Доказательства этих признаков читатель найдет в учебном пособии [1] в главе II.

Теорема 1 (первый признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 2 (второй признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 3 (третий признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Так же как и в евклидовой геометрии, эти теоремы широко используются в геометрии Лобачевского. Ниже мы сформулируем и докажем еще два признака равенства треугольников в абсолютной геометрии.

2. Теорема о внешнем угле треугольника. Напомним, что прямая называется *секущей* по отношению к двум прямым, если она пересекает их в двух точках. При пересечении прямых AC и BD секущей AB образуются восемь неразвернутых углов, четыре из которых имеют общую вершину A , а другие четыре — общую вершину B . Если $C, D \div AB$, то углы CAB и DBA называются *накрест лежащими углами*. Если $C, D \doteq AB$, E и F — точки, такие, что $E-A-B$, $A-B-F$, то углы ABD и EAC , а также углы BAC и FBD называются *соответственными углами*. При пересечении двух прямых секущей образуются две пары накрест лежащих углов и четыре пары соответственных углов.

Докажем лемму о прямых, которые при пересечении с секущей образуют равные накрест лежащие или равные соответственные углы.

Лемма. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны, то данные прямые не пересекаются.

□ Пусть секущая AB пересекает прямые AC и BD , $C, D \div AB$ и $\angle BAC = \angle ABD$. Докажем, что прямые AC и BD не пересекаются (рис. 1, а). Допустим, что это не так, т. е. что прямые AC и BD имеют общую точку. Не нарушая общности, можно предположить, что этой точкой является точка C . Отложим на луче BD отрезок BC' равный отрезку AC (рис. 1, б). Треугольники ABC и BAC' равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle ABC = \angle BAC'$. С другой стороны, так как $\angle ABD = \angle BAC$, то углы ABC и BAC' , смежные с этими углами, также равны. Здесь AE — продолжение луча AC (см. рис. 1, б). Так как $C', E \div AB$, то по аксиоме III₇ лучи AC' и AE совпадают. Это невозможно, так как две прямые AC и BC не могут иметь две общие точки C и C' .

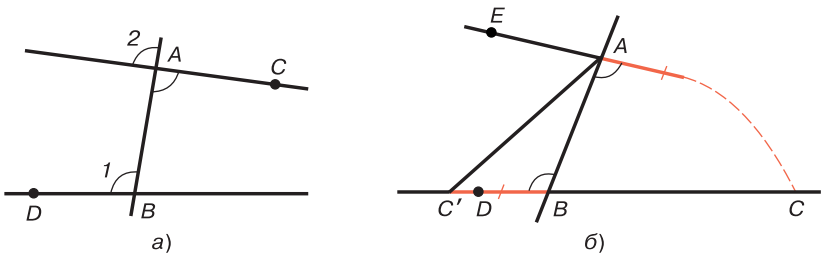


Рис. 1

Если при пересечении прямых AC и BD соответственные углы равны (например, углы 1 и 2 на рис. 1, а), то $\angle 2 = \angle BAC$, поэтому $\angle 1 = \angle BAC$, и по доказанному прямые AB и CD не пересекаются. ■

Пользуясь этой леммой, докажем следующую важную теорему абсолютной геометрии о внешнем угле треугольника. Эта теорема играет существенную роль в геометрии Лобачевского.

Теорема 4. *Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.*

□ Рассмотрим треугольник ABC и докажем, например, что $\angle BCD > \angle A$, где D — точка, такая, что $A-C-D$ (рис. 2, а).

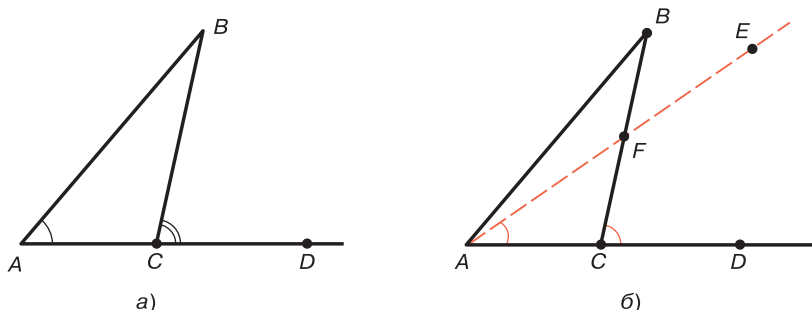


Рис. 2

Так как $\angle A$ и $\angle BCD$ являются соответственными углами при пересечении пересекающихся прямых AB и CB секущей AC , то по доказанной лемме $\angle BCD \neq \angle A$. Поэтому возможны два случая: а) $\angle BCD < \angle A$; б) $\angle BCD > \angle A$. Докажем методом от противного, что случай а) невозможен.

По предположению $\angle A > \angle BCD$, поэтому существует внутренний луч AE угла A , такой, что $\angle BCD = \angle EAC$ (рис. 2, б). По свойству 1.2° §1 луч AE пересекает отрезок BC в некоторой точке F . Прямые AE и CB пересекаются и при пересечении с секущей AC образуют равные односторонние углы FAC и FCD . Этот вывод противоречит предыдущей лемме. Таким образом, $\angle BCD > \angle A$. ■

Следствие. *Если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то два других угла острые.*

□ Пусть в треугольнике ABC угол A прямой или тупой. Тогда смежный с ним угол прямой или острый. Этот угол является внешним углом треугольника, поэтому углы B и C треугольника ABC острые. ■

3. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Напомним, что треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона — основанием равнобедренного треугольника. Равнобедренный треугольник является фигурой абсолютной геометрии и, следовательно, фигурой геометрии Лобачевского.

Следующая теорема о равнобедренном треугольнике доказывается на основе первого и второго признаков равенства треугольников. Ее доказательство читатель может найти в учебном пособии [1], § 10 (теорема 2).

Теорема 5. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Обратное: если в треугольнике два угла равны, то стороны, противолежащие этим углам, равны, т. е. треугольник равнобедренный.*

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника, известная читателю из курса геометрии средней школы, является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 6. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Обратное: против большего угла лежит большая сторона.*

Отрезок PQ называется суммой отрезков AB и CD , если на этом отрезке существует точка M , такая, что $AB = PM$, а $CD = MA$. Нетрудно доказать, что если PQ и $P'Q'$ являются суммами отрезков AB и CD , то $PQ = P'Q'$. Отсюда следует, что сумма двух отрезков AB и CD , которая обозначается через $AB + CD$, определяется с точностью равенства отрезков.

Теорема о неравенстве треугольника также является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 7. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.*

Доказательства теорем 6 и 7 читатель найдет в учебном пособии [1], § 16 (теоремы 1 и 2).

4. Четвертый и пятый признаки равенства треугольников.

Теорема 8 (четвертый признак равенства треугольников). *Если два угла и сторона, противолежащая одному из этих углов, одного треугольника соответственно равны двум углам и соответствующей стороне другого, то такие треугольники равны.*

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB = A_1B_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Принимая во внимание первый признак равенства треугольников, достаточно доказать, что $AC = A_1C_1$. Докажем это равенство методом от противного. Пусть, например, $AC < A_1C_1$. Тогда на отрезке A_1C_1 , существует такая точка D_1 , что $AC = A_1D_1$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1D_1$, поэтому $\angle C = \angle B_1D_1A_1$. С другой стороны, по условию $\angle C = \angle C_1$, следовательно, $\angle B_1D_1A_1 = \angle C_1$. Мы пришли к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника: в треугольнике $B_1C_1D_1$ угол C_1 , равен внешнему углу при вершине D_1 . ■

Замечание. В геометрии Евклида теорема является непосредственным следствием второго признака равенства треугольников и теоремы о сумме углов треугольника. В самом деле, из теоремы о сумме углов треугольника следует, что $\angle B = \angle B_1$, поэтому треугольники ABC и AB_1C равны по стороне и двум прилежащим углам.

Теорема 9 (пятый признак равенства треугольников). *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и угол одного треугольника, лежащий против большей из этих сторон, равен соответствующему углу другого, то такие треугольники равны.*

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и в треугольнике ABC $AB < AC$. Тогда, очевидно, $A_1B_1 < A_1C_1$ (рис. 3). Теорема будет доказана, если мы докажем что $BC = B_1C_1$.

Допустим, что $BC \neq B_1C_1$, например, что $BC < B_1C_1$. Тогда на отрезке B_1C_1 существует такая точка C_2 , что

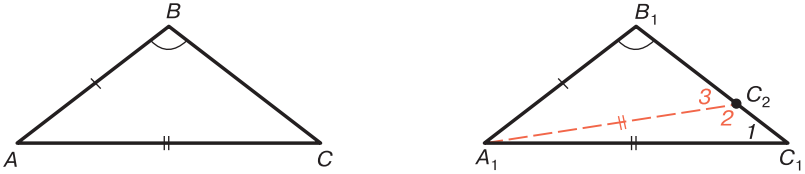


Рис. 3

$BC = B_1C_2$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_2$, поэтому $AC = A_1C_2$. Отсюда следует, что $A_1C_1 = A_1C_2$, т. е. треугольник $A_1C_1C_2$ равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 3). По теореме о внешнем угле треугольника $\angle 3 > \angle 1$ и $\angle 2 > \angle B_1$. Из этих неравенств следует, что $\angle 3 > \angle B_1$.

Применив теорему 6 к треугольнику $A_1B_1C_2$, получим $A_1B_1 > A_1C_2$, но $A_1C_2 = A_1C_1$, поэтому $A_1B_1 > A_1C_1$. Мы пришли к противоречию. ■

5. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Из следствия теоремы 4 о внешнем угле треугольника непосредственно вытекает, что на плоскости Лобачевского, так же как и на евклидовой плоскости, в любом треугольнике либо все три угла острые (остроугольный треугольник), либо один угол прямой, а два других острые (прямоугольный треугольник), либо один угол тупой, а два других острые (тупоугольный треугольник). Из теоремы 6 мы заключаем, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза (т. е. сторона, лежащая против прямого угла) больше любого из его катетов (т. е. двух других его сторон).

Сформулируем теперь признаки равенства прямоугольных треугольников.

Теорема 10. *Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 , равны, если выполняется одно из условий:*

- 1°. $CA = C_1A_1$, $CB = C_1B_1$.
- 2°. $CA = C_1A_1$, $\angle A = \angle A_1$.
- 3°. $CA = C_1A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
- 4°. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.
- 5°. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

Эти признаки не требуют особого доказательства, так как они непосредственно следуют из соответствующих признаков равенства треугольников. В самом деле, признаки 1° и 2° следуют из теорем 1 и 2, признаки 3° и 4° — из теоремы 8, а признак 5° — из теоремы 9.

6. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Понятия середины отрезка и биссектрисы угла относятся к абсолютной геометрии, поэтому в геометрии Лобачевского эти понятия вводятся точно так же, как и в евклидовой геометрии.

Серединой отрезка AB называется такая точка C прямой AB , что $AC = CB$. *Биссектрисой* неразвернутого угла hk называется такой внутренний луч l этого угла, что $\angle hl = \angle lk$. Пользуясь признаками равенства треугольников, можно доказать, что каждый отрезок имеет одну и только одну середину, которая лежит на самом отрезке, и каждый неразвернутый угол имеет одну и только одну биссектрису (см. [1], § 11).

Таким образом, учитывая следствие 2 теоремы из § 1 о перпендикулярных прямых, мы приходим к выводу, что понятия медиан, биссектрис и высот треугольника относятся к абсолютной геометрии, поэтому в геометрии Лобачевского они вводятся точно так же, как и в геометрии Евклида. Каждый треугольник имеет три медианы, три биссектрисы и три высоты. Медиана, биссектриса и высота треугольника в геометрии Лобачевского обладают свойствами, которые в ряде случаев существенно отличаются от свойств этих отрезков на плоскости Евклида. В дальнейшем изложении мы подробно рассмотрим эти вопросы.

§ 3. Аксиомы непрерывности. Измерение отрезков и углов

1. Длина отрезка. Понятия длины отрезка и величины угла относятся к абсолютной геометрии, поэтому теория измерения отрезков и углов, известная читателю из курса оснований геометрии, полностью применима

и в геометрии Лобачевского. Рассмотрим в обзорном порядке основы этой теории.

Говорят, что введено измерение отрезков, если установлено соответствие между отрезками и положительными числами так, что выполняются условия:

- D_1 . Равным отрезкам соответствует одно и то же число.
- D_2 . Если точка B лежит на отрезке AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b , то отрезку AC соответствует число $a + b$.
- D_3 . Некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует число 1.

Положительное число, указанным образом соответствующее отрезку, называется *длиной этого отрезка*. Отрезок PQ называется *единицей измерения* или *единичным отрезком*.

2. Аксиомы непрерывности. Существование соответствия, удовлетворяющего условиям D_1 , D_2 и D_3 , невозможно установить, пользуясь аксиомами групп I–III. Для этого необходимо ввести новую аксиому, в качестве которой мы примем следующую аксиому существования длин отрезков.

IV_1 . При произвольно выбранном единичном отрезке PQ существует соответствие, удовлетворяющее условиям D_1 , D_2 и D_3 .

Пользуясь аксиомами групп I–III и аксиомой IV, можно доказать предложение Архимеда, которое в схеме Гильберта принято как аксиома.

Теорема 1 (предложение Архимеда). Если AB и CD — произвольные отрезки, то на луче AB существует n точек, таких, что $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = CD$ и точка B лежит между точками A и A_1 (см. [1], § 14, теорема 1).

Важно отметить, что если выбран единичный отрезок PQ , то существует не более одного соответствия между отрезками и положительными числами, при котором удовлетворяются условия D_1 , D_2 и D_3 измерения отрезков (см. [1], § 14, теорема 2).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Часть I. Планиметрия

Глава 1. Обзор основных фактов абсолютной геометрии на плоскости	6
§ 1. Обзор основных следствий и аксиом групп I–III абсолютной планиметрии	6
§ 2. Треугольники	11
§ 3. Аксиомы непрерывности. Измерение отрезков и углов	18
§ 4. Движения. Осевая и центральная симметрии	23
§ 5. Сонаправленность лучей. Направленная прямая ..	28
Задачи к главе 1	32
Глава 2. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского	35
§ 6. Аксиома Лобачевского. Теоремы о сумме углов треугольника и четырехугольника	35
§ 7. Признаки равенства треугольников на плоскости Лобачевского	41
§ 8. Предложения, эквивалентные аксиоме Лобачевского	46
§ 9. Параллельность луча и прямой	51
§ 10. Параллельность направленных прямых	55
§ 11. Параллельность ненаправленных прямых	60
§ 12. Функция Лобачевского	64
Задачи к главе 2	69
Глава 3. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского	73
§ 13. Двупрямоугольник. Четырехугольник Саккери ...	73
§ 14. Взаимное расположение параллельных прямых ..	77
§ 15. Расходящиеся прямые	85
§ 16. Заградительные прямые	91
§ 17. Проекция прямой на прямую	99
Задачи к главе 3	104

Глава 4. Окружность, эквидистанта и орицикл	107
§ 18. Пучки прямых на плоскости Лобачевского и их образы при движении	107
§ 19. Траектории пучков	112
§ 20. Окружность	120
§ 21. Взаимное расположение прямой и окружности и двух окружностей	126
§ 22. Эквидистанта	132
§ 23. Орицикл	138
§ 24. Взаимное расположение прямой и орицикла. Предельная линия	146
Задачи к главе 4	154
Глава 5. Треугольники, четырехугольники и правильные многоугольники	158
§ 25. Сумма углов треугольника	158
§ 26. Замечательные точки и прямые треугольника	166
§ 27. Взаимное расположение прямых, содержащих высоты треугольника	172
§ 28. Основные виды выпуклых четырехугольников	178
§ 29. Правильные многоугольники	189
Задачи к главе 5	195
Глава 6. Движения плоскости Лобачевского. Классификация движений	198
§ 30. Движения плоскости. Произведение движений	198
§ 31. Инвариантные точки и инвариантные прямые движения	202
§ 32. Орициклическое движение	210
§ 33. Классификация движений на плоскости Лобачевского	216
§ 34. Группа симметрий циклических линий	218
§ 35. Конгруэнтные отображения прямой на прямую. Движения прямой	221
Задачи к главе 6	225
Глава 7. Расширенная плоскость. Вырожденные треугольники	228
§ 36. Отображение плоскости Лобачевского на открытый круг	228
§ 37. Образы простейших фигур при отображении Ω_{Or}	234
§ 38. Несобственные точки плоскости. Расширенная плоскость	240
§ 39. Вырожденные треугольники	246

§ 40. Биссектрисы и высоты вырожденного треугольника	252
§ 41. Движения расширенной плоскости	261
Задачи к главе 7	269
Глава 8. Дефект и площадь многоугольника на плоскости Лобачевского	273
§ 42. Дефект многоугольника	273
§ 43. Площадь многоугольника. Равносоставленные и равновеликие многоугольники	280
§ 44. Основные теоремы о площадях многоугольников .	285
§ 45. Площадь вырожденного треугольника	291
Задачи к главе 8	296
 Часть II. Стереометрия 	
Глава 1. Обзор основных фактов абсолютной геометрии в пространстве	300
§ 1. Обзор основных следствий из аксиом абсолютной геометрии трехмерного пространства	300
§ 2. Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости	303
§ 3. Перпендикулярность плоскостей	306
§ 4. Движения пространства	310
Глава 2. Аксиома Лобачевского. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского	314
§ 5. Аксиома Лобачевского. Параллельность лучей ...	314
§ 6. Параллельность прямых в пространстве. Взаимное расположение прямых	317
§ 7. Параллельность прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости	321
§ 8. Параллельность плоскостей	327
§ 9. Взаимное расположение двух плоскостей	332
Задачи к главе 2	338
Глава 3. Простейшие поверхности в пространстве Лобачевского	341
§ 10. Связки прямых в пространстве и их траектории .	341
§ 11. Сфера	350
§ 12. Эквидистантная поверхность	354
§ 13. Орисфера	361

Глава 4. Орицикл. Внутренние геометрии орисферы и эквидистантной поверхности	368
§ 14. Длина дуги орицикла	368
§ 15. Концентрические дуги орициклов	372
§ 16. Гиперболические функции	377
§ 17. Трехвершинник. Абсолютная дуга орицикла	379
§ 18. Внутренние геометрии орисферы и эквидистантной поверхности	386
Задачи к главе 4	392
Глава 5. Гиперболическая тригонометрия и ее приложения	394
§ 19. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике	394
§ 20. Тригонометрические соотношения в произвольном треугольнике	400
§ 21. Аналитическое выражение функции Лобачевского	406
§ 22. Теорема Чевы, свойства биссектрис и медиан треугольника	410
Задачи к главе 5	415
Глава 6. Непротиворечивость геометрии Лобачевского. Геометрия Лобачевского и реальное пространство	417
§ 23. Интерпретация Кэли—Клейна системы аксиом трехмерной геометрии Лобачевского	417
§ 24. Наложения в интерпретации Кэли—Клейна	421
§ 25. Проверка выполнения аксиом групп III–V в интерпретации Кэли—Клейна	429
§ 26. Открытие геометрии Лобачевского	432
§ 27. Геометрия Лобачевского и реальное пространство	436
Задачи к главе 6	441
Приложение 1	442
Приложение 2	444
Указания и ответы	447
Литература	455
Предметный указатель	456